

The influence of hair on DC conductivity ¹

Ulises Hernández Vera

Tutor de Tesis: Mokhtar Hassaine

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca

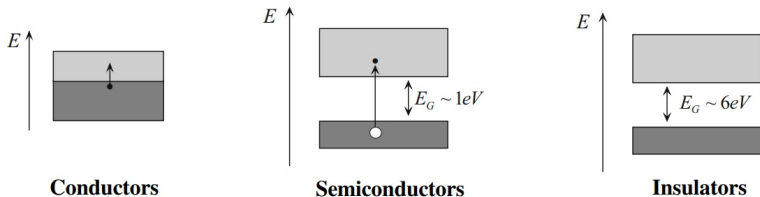
October 15, 2024

¹Sostenido por Beca Doctorado Nacional ANID N°21231297

- 1 Conductividad Eléctrica de los Sólidos
 - Conductividad desde una perspectiva clásica
- 2 Correspondencia Holográfica CFT/AdS
 - ¿Qué es la correspondencia Holográfica CFT/AdS?
 - Implicaciones y Aplicaciones
- 3 Disipación de Momentum
 - Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons
- 4 Teorías escalar-tensor de Horndeski y más allá

Conductividad Eléctrica de los Solidos

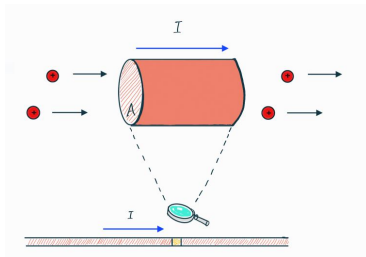
Los materiales se pueden clasificar según su capacidad para conducir cargas eléctricas, donde se puede distinguir entre tres tipos de materiales: conductores, semiconductores y aislantes. En la teoría de sólidos, la estructura electrónica de un material se describe a través de los diferentes niveles de energía ocupados por los electrones, organizados en lo que se conoce como bandas de energía.



Conductividad desde una perspectiva clásica

Al aplicar un campo eléctrico externo a un conductor, este ejerce fuerzas sobre los electrones, haciendo que aceleren hasta alcanzar una velocidad media constante \vec{v} .

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$



la corriente es definida

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{q dN}{dt}$$

Densidad de Corriente

$$J = \frac{I}{A}$$

Conductividad desde una perspectiva clásica

Donde la densidad de corriente a través de la sección A es

$$\vec{J} = \frac{qdN}{Adt} = \frac{q dN dl}{Adl dt} = q \frac{dN}{dV} \vec{v}$$

dado que $\vec{v} = \mu \vec{E}$ y definiendo $\sigma := q \frac{dN}{dV} \mu$, tenemos que la densidad de corriente es directamente proporcional al campo Eléctrico.

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

donde esta proporcionalidad σ es conocida como conductividad, el cual es la medida de la capacidad de un material para dejar pasar la corriente eléctrica a través de él.

¿Qué es la correspondencia Holográfica CFT/AdS?

- La correspondencia AdS/CFT es una dualidad entre una teoría de gravedad cuántica en un espacio de Anti-de Sitter (AdS) y una teoría de campos conforme (CFT) definida en el borde de ese espacio.
- Esta propuesta fue introducida por Maldacena en 1997 y es uno de los avances más importantes en la teoría de cuerdas.
- En esta correspondencia, las dimensiones adicionales del espacio AdS se "codifican" en el borde del espacio, lo que da lugar a una descripción holográfica.
-

Teoría Gravitatoria	Teoría Cuántica de Campos
Campo escalar $\phi(r, x)$	Operador escalar $\mathcal{O}(x)$
Campo de Gauge $A_\mu(r, x)$	Corriente conservada $J_\mu(x)$
Tensor métrico $g_{\mu\nu}(r, x)$	Tensor de Energía Momento $T_{\mu\nu}(x)$

- **Dualidad Gravedad/Campos:** Fenómenos gravitacionales complejos, como los agujeros negros en AdS, pueden entenderse a través de la teoría de campos en el borde.
- **QCD y Materia Condensada:** AdS/CFT ha encontrado aplicaciones en la cromodinámica cuántica (QCD) y en el estudio de superconductores y sistemas fuertemente correlacionados en física de la materia condensada.
- **Holografía de Agujeros Negros:** La correspondencia permite estudiar la entropía de los agujeros negros y su relación con la teoría de información.
- **Disipación de Momentum:** En los modelos holográficos estos incorporan la disipación de momentum mediante campos escalares que rompen la simetría traslacional, reproduciendo la resistividad observada en materiales reales.

Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons²

La acción considerada por los autores esta dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2} \left[(\partial\phi)^2 + \Phi_1(\phi) (\partial\chi_1)^2 + \Phi_2(\phi) (\partial\chi_2)^2 \right] - V(\phi) - \frac{Z(\phi)}{4} F^2 \right],$$

Todas las soluciones que se analizan son todas aquellas dentro del ansatz

$$ds^2 = -U dt^2 + U^{-1} dr^2 + e^{2V_1} dx_1^2 + e^{2V_2} dx_2^2, \\ A = a dt, \quad \chi_1 = k_1 x_1, \quad \chi_2 = k_2 x_2,$$

²Donos, A., Gauntlett, J.P. Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons. J. High Energ. Phys. 2014, 81 (2014).

Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons

La densidad de corriente $J^a = (J^t, J^x, J^y)$ en la teoría dual de campo, tiene la forma

$$J^a = \sqrt{-g} Z(\phi) F^{ar},$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Dado el ansatz considerado por los autores, la componente de tiempo de las ecuaciones de movimiento para el campo de Maxwell viene dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} Z(\phi) F^{rt}) = 0, \quad \Rightarrow \quad q \equiv J^t = e^{V_1 + V_2} Z(\phi) a',$$

Donde q es una expresión constante, la cual es asociada con la carga eléctrica

La solución de agujero negro es perturbada para observar su respuesta a primer orden después de aplicar un campo eléctrico de magnitud E a lo largo de una de las direcciones espaciales x_1 . Para este propósito, se considera el siguiente ansatz.

$$A_{x_1} = \delta(-Et + a_{x_1}(r)),$$

$$g_{tx_1} = \delta g_{tx_1}(r),$$

$$g_{rx_1} = e^{2V_1} \delta h_{rx_1}(r),$$

$$\chi_1 = k_1 x_1 + \delta \chi_1(r),$$

Esto nos permite obtener una expresión para la corriente conservada.

$$J^{x_1} = -e^{V_2 - V_1} Z(\phi) U \delta a'_{x_1} - q e^{-2V_1} \delta g_{tx_1}, \quad (1)$$

Calculo de las conductividades de corriente continua

Los autores proceden a estudiar las ecuaciones de Einstein a primer orden, de las cuales se obtiene.

$$\delta h_{rx_1} = \frac{Eqe^{-V_1-V_2}}{k_1^2 \Phi_1(\phi) U} + \frac{\delta \chi'_1}{k_1}, \quad (2)$$

$$\delta g''_{tx_1} + (-V'_1 + V'_2) \delta g'_{tx_1} - \left(2V'_1(V'_1 + V'_2) + 2V''_1 + \frac{e^{-2V_1} k_1^2 \Phi_1(\phi)}{U} \right) \delta g_{tx_1} + e^{-V_1-V_2} q \delta a'_{x_1} = 0. \quad (3)$$

para que las perturbaciones sean regulares, es necesario proponer ciertas condiciones de borde, tanto en el horizonte de eventos como en el infinito. Para ver las condiciones en el horizonte, es necesario cambiar a las coordenadas de Eddington-Finkelstein $v = t + \int \frac{dr}{U}$.

Calculo de las conductividades de corriente continua

En estas coordenadas, vemos que la perturbación del campo de gauge está dada por

$$A_{x_1} = \delta \left(a_{x_1} - E \left(v - \int \frac{dr}{U} \right) \right) dx_1,$$

y, por lo tanto, se impone como condición de borde que $\delta a'_{x_1} \sim_{r_+} -\frac{E}{U}$, al mismo tiempo, la métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = -Udv^2 + 2dvdr + e^{2V_1} dx_1^2 + e^{2V_2} dx_2^2 + \delta g_{tx_1} dv dx_1 \\ - \frac{\delta g_{tx_1}}{U} dv dr + \delta h_{rx_1} dv dr$$

Sin embargo, a partir de (2), se puede ver que h_{rx_1} es divergente, y por lo tanto, pedir que la métrica sea regular sugiere que $\delta g_{tx_1} \sim_{r_+} U \delta h_{rx_1}$

Con respecto a las condiciones de borde en el infinito, estas dependen claramente de las funciones de acoplamiento $Z(\phi), \Phi_1(\phi)$. Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico del fondo de AdS:

$$U \sim_{\infty} r^2 + \dots, \quad V_1 = V_2 \sim_{\infty} r^2 + \dots$$
$$a \sim_{\infty} \mu - \frac{q}{r}, \quad \phi \sim_{\infty} \frac{c}{r^{3-\Delta}}$$

(con $\Delta < 3$), podemos sustituir (1) en (3) para obtener una relación para g_{tx_1} .

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tx} = 0$$

y en consecuencia, $a_{x_1} \sim_{\infty} Jr^{-1}$.

Calculo de las conductividades de corriente continua

Usando todas las condiciones de borde sobre el horizonte en (1), se obtiene la relación $J = \sigma E$, donde

$$\sigma = \left[e^{-V_1+V_2} Z(\phi) + \frac{e^{V_1+V_2} Z(\phi)^2 (a')^2}{k_1^2 \Phi(\phi)} \right]_{r=r_+} \quad (4)$$

La aplicación de este método en diferentes teorías da lugar a expresiones similares para la conductividad, que dependen exclusivamente del horizonte del espacio-tiempo.

- DC conductivities with momentum dissipation in Horndeski theories

[Jiang, W.J., Liu, H.S., Lü, H. et al., J. High Energ. Phys. 2017, 84 (2017)]

- Axionic charged black branes with arbitrary scalar nonminimal coupling [Cisterna, A., Guajardo, L. and Hassaine, M. Eur. Phys. J. C 79, 418 (2019)]

- Exploring the black hole spectrum of axionic Horndeski theory [Matteo

Baggioli, Adolfo Cisterna, and Konstantinos Pallikaris, Phys. Rev. D 104, 104067]

Teorías escalar-tensor de Horndeski

La teoría de Horndeski fue desarrollada en 1974 por Horndeski y es la acción escalar-tensor cuatro-dimensional más general con un principio variacional que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden.

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad \mathcal{E}_\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi},$$

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi, X) R \right. \\ \left. + G_{4X} [(\square \phi)^2 - \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}] + G_5(\phi, X) G^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \frac{G_{5X}}{6} [(\square \phi)^3 - 3 \square \phi \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + 2 \phi_{\mu\nu} \phi^{\nu\rho} \phi_{\rho}^{\mu}] \right\},$$

donde $\phi_{\mu} = \nabla_{\mu} \phi$, $\phi_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi$ y G_i son funciones arbitrarias de ϕ y $X = -g^{\mu\nu} \phi_{\mu} \phi_{\nu} / 2$.

Esta teoría, se puede dividir en soluciones que describen agujeros negros sin pelo ("más comunes") o con pelo

- Los agujeros negros con pelo hacen referencia a las soluciones que poseen un parametro adicional asociado al campo escalar.
 - Black holes with primary scalar hair [Athanasios Bakopoulos, Christos Charmousis, Panagiota Kanti, Nicolas Lecoeur, and Theodoros Nakas, Phys. Rev. D 109, 024032].
 - Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair: An exact solution framework for scalarizing in every dimension [Olaf Baake, Adolfo Cisterna, Mokhtar Hassaine, and Ulises Hernandez-Vera, Phys. Rev. D 109, 064024]

Pasos siguientes

- 1 Entender la termodinámica del pelo gravitatorio.
- 2 Ver si las soluciones encontradas en "Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair" pueden acomodar campos axiónicos.
- 3 Calcular la conductividad de corriente continua.

Modelo

$$S_{\{\tilde{G}_4(X)\}}[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[a_0 + a_1 R + \tilde{G}_2(X) + \tilde{G}_4(X) R + \frac{\tilde{G}_4(X)}{2X} ((\square\phi)^2 - \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}) \right. \\ \left. + \left(\frac{-2X\tilde{G}_{4,X}(X) + \tilde{G}_4(X)}{2X^2} \right) (\square\phi\phi^\mu\phi_{\mu\nu}\phi^\nu - \phi_\mu\phi^{\mu\nu}\phi_{\nu\rho}\phi^\rho) \right]$$

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{2,\kappa}^2, \quad \phi(t, r) = qt \pm \int \sqrt{\frac{q^2}{f(r)^2} - \frac{2X(r)}{f(r)}} dr$$

$$f(r) = \frac{a_0 r^2}{a_1 6} + \kappa - \frac{2M}{r} + \frac{1}{a_1 r} \int \mathcal{H} dr$$