



Modificación de Nash en variedades tóricas de dimensión 3

Rolando Suárez Quevedo

Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca

Índice general

| | |
|---|-----|
| Introducción | 7 |
| Capítulo 1. Preliminares sobre variedades tóricas | 13 |
| 1. Variedades Tóricas Afín | 13 |
| 1.1. Semigrupo afín | 16 |
| Capítulo 2. La Modificación de Nash | 19 |
| 1. La Modificación de Nash como un algoritmo combinatorial | 19 |
| 1.1. Definiciones básicas y ejemplos | 19 |
| 2. \mathcal{L} -Algoritmo de Nash n dimensional | 29 |
| 2.1. Algoritmo n dimensional | 29 |
| 2.2. \mathcal{L} -Algoritmo de Nash en dimensión 2 | 35 |
| Capítulo 3. Modificación de Nash en variedades tóricas de dimensión 3. | 41 |
| 1. Modificación de Nash sobre Variedades Tóricas de dimensión 3. | 42 |
| 1.1. Ejemplo | 102 |
| 2. \mathcal{L} -Transformaciones lineales con pendientes irracionales para $n = 2$ | 105 |
| Bibliografía | 119 |

A Delfina, Princesa y Trinidad.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todos los profesores del Instituto de Matemáticas, cuyo compromiso y dedicación han sido esenciales en mi proceso de aprendizaje. Su pasión por la ciencia ha creado un ambiente de estudio inspirador. En especial, quisiera destacar a mi director de tesis, Maximiliano Leyton, cuya orientación ha sido invaluable. Su compromiso, paciencia y apoyo constante han sido pilares fundamentales durante este viaje académico. Agradezco profundamente que haya creído en mí, por inspirarme a superar los desafíos planteados, y por ser un mentor excepcional. Su guía ha marcado una diferencia significativa en mi vida académica, y estoy sinceramente agradecido por la oportunidad de haber aprendido junto a usted.

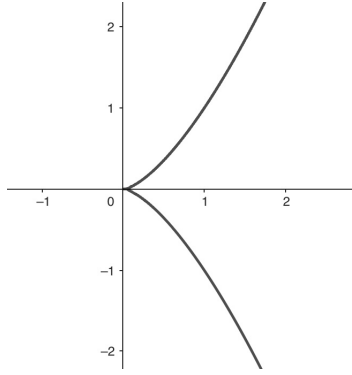
Además, quisiera expresar mi gratitud al profesor Mark Spivakovsky y a Daniel Duarte por presentarme este fascinante problema de investigación. Su dedicación y apoyo me han permitido alcanzar un mayor entendimiento y profundizar en mis conocimientos.

Introducción

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y V una variedad algebraica afín. Para ilustrar de manera intuitiva un punto singular en la variedad V , consideremos que V es una curva en \mathbb{A}^2 definida por $P(x, y) = 0$, con $P \in k[x, y]$. Se conoce que la mayoría de los puntos en V (que denominaremos puntos suaves o lisos) presentan una única recta tangente. Sin embargo, esta propiedad puede fallar cuando la curva se cruza o presenta un "pliegue", como sucede en las curvas definidas por los polinomios $y^2 - x^3 = 0$ y $y^2 - x^2(1 + x) = 0$. En estas situaciones, las curvas exhiben más de una recta tangente en el origen. Intuitivamente, un punto singular se caracteriza por tener una recta tangente no unívocamente definida. Diremos que la variedad V es no-singular (o suave) si cada uno de sus puntos es suave.

Consideremos una variedad X , entonces, X se puede expresar como la unión disjunta de su conjunto suave y su conjunto singular que denotaremos por $Sing(X)$. La resolución de singularidades para una variedad algebraica singular X consiste en encontrar otra variedad que, esencialmente, comparta las mismas propiedades que X , pero carezca de singularidades. La idea central de una resolución de singularidades es intervenir únicamente en la parte singular de X , preservando la parte suave sin alteraciones significativas.

Por ejemplo, la variedad algebraica singular $V_1 : y^2 - x^3 = 0$, cuyo conjunto singular está compuesto únicamente por el punto $(0,0)$.



Definimos la variedad algebraica suave $V'_1 : y^2 - x = 0$ y consideremos el siguiente morfismo de variedades algebraicas:

$$\begin{aligned} \phi : V'_1 \setminus \{(0,0)\} &\longrightarrow V_1 \setminus \{(0,0)\} \\ (x, y) &\longmapsto (x, xy). \end{aligned}$$

Notemos que ϕ es una biyección cuya inversa está dada por:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : V_1 \setminus \{(0,0)\} &\longrightarrow V'_1 \setminus \{(0,0)\} \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, \frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

lo que corresponde a una resolución de la singularidad de la variedad algebraica V_1 .

En concreto, una resolución de singularidades de una variedad singular X es:

1. Un morfismo propio birrational $\varphi : Y \rightarrow X$.
2. Y es una variedad no singular.
3. $Y \setminus \varphi^{-1}(\text{Sing}(X)) \cong X \setminus \text{Sing}(X)$.

La existencia de la resolución de singularidades de variedades algebraicas sobre un cuerpo de característica cero fue probado por Heisuke Hironaka el año 1964 en su artículo "*Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero*" [16]. Para característica $p > 0$ es un problema aún abierto. La demostración de Hironaka es de una gran profundidad y complejidad, la idea básica e intuitiva es considerar una colección finita de

invariantes asociadas a la singularidad para medir "que tan singular" es la variedad y luego, utilizando una iteración de estallidos de sub-variedades suaves del espacio ambiente \mathbb{A}^n y las transformadas estrictas en la variedad, se demuestra que estos invariantes disminuyen, lo que indica que después de cada estallido en nuestra variedad aparece una cierta mejora. Una desventaja de este método es que no es canónico y depende de muchas elecciones.

Se ha propuesto una alternativa de estallidos para la resolución de singularidades con un enfoque más canónico e independiente de elecciones, denominado la modificación de Nash. Consiste en sustituir puntos singulares de la variedad por las posiciones límites de los espacios tangentes de puntos no singulares. John Nash inspirado por la demostración de Hironaka, se planteo la siguiente pregunta: ¿Es posible obtener una resolución de singularidades de una variedad V a través de una iteración finita de la modificación de Nash?

Augusto Nobile en su artículo "*Some properties of the Nash blowing-up*" [19] y Bernard Teissier en "*The hunting of invariants in the geometry of discriminants*" [29] demostraron que en un cuerpo k de característica cero, la modificación de Nash es un isomorfismo si y sólo si la variedad es no singular. Como corolario a este resultado, se tiene que en el caso de curvas, el Método de Nash resuelve las singularidades con una iteración finita.

Rebassoo en 1977 en su tesis de doctorado "*Desingularization Properties of the Nash Blow-up Process*" [25], demuestra que la iteración de la modificación de Nash resuelve las singularidades de la familia $\{z^p - x^p y^r = 0\}$ para p, q y r en \mathbb{N} .

En el caso de variedades de dimensión mayor o igual a dos es un problema abierto, incluso para las superficies tóricas.

En característica positiva $p > 0$, la Modificación de Nash no funciona, un contraejemplo, es considerar la variedad singular $X = \{y^2 - x^3 = 0\} \subset k^2$ y suponer que trabajamos en un cuerpo de característica 2, entonces como la

modificación de Nash de X denotada por $\mathcal{N}^1 X$ coincide con la explosión del ideal jacobiano que define la ecuación de la curva, $\mathcal{N}^1 X \cong Bl_{\langle 2y-3x^2 \rangle} X$, notemos que en característica $p = 2$, se tiene que $\mathcal{N}^1 X \cong Bl_{\langle -3x^2 \rangle}$, esto significa que estamos estallando un ideal principal, luego $\mathcal{N}^1 X$ es isomorfo a la variedad inicial X .

Una de las grandes dificultades observadas en este método, es que la normalidad no se conserva por la modificación de Nash. Una variación del Método de Nash es utilizar la modificación de Nash Normalizada que consiste en una iteración de la Modificación de Nash seguido por Normalización.

Sobre un cuerpo de característica cero, G. Gonzalez-Sprinberg, en 1982 en su artículo "*Résolution de Nash des points doubles rationnels*" [10] probó que en puntos dobles racionales son resueltos mediante la modificación de Nash Normalizada. El 1983, H. Hironaka en "*On Nash Blowing-up*" [17] probó que después de una iteración finita de la modificación de Nash Normalizada, toda singularidad de superficie es transformada en una singularidad Sandwich, lo que significó una reducción al problema. Luego, en 1985, M. Spivakovsky en su artículo "*Sandwiched surface singularities and the Nash resolution for surfaces*" [28], demostró que en dimensión 2, toda singularidad Sandwich se resuelve a través de la modificación de Nash Normalizada. Estos resultados dan una esperanza que el Método de Nash (sin normalización) debería funcionar, al menos en el caso de superficies.

En el contexto de variedades tóricas sobre un cuerpo de característica cero, G. Gonzalez-Sprinberg, en 1977, "*Eventails en dimension 2 et transformé de Nash*" [9] probó que la iteración finita de la modificación de Nash Normalizada resuelve singularidades de superficies tóricas normales. En el 2012, P. González Perez y B. Teissier en "*Toric geometry and the Simple Nash modification*" [12] paralelo con D. Grigoriev y P. Milman en "*Nash resolution for binomial varieties as Euclidean division. A priori termination bound, polynomial complexity in essential dimension 2*" [13] han demostrado que en el caso de variedades tóricas no necesariamente normales, la iteración de la modificación de Nash puede traducirse en un algoritmo puramente combinatorio.

Finalmente, Duarte, en 2013 en su tesis doctoral "*Nash modification on toric surfaces and higher Nash blowup on normal toric varieties*" [5], da una solución parcial al problema, en donde las iteraciones de un algoritmo combinatorio que sigue elecciones de una transformación lineal L permite verificar, en ciertos casos, que el Método de Nash funciona para superficies tóricas.

En esta tesis nos centraremos en analizar el algoritmo n dimensional dado por Grigoriev y Milman en [13], en primer lugar definiremos una transformación lineal, denotada por \mathcal{L} , que generaliza la transformación previamente definida por Duarte en [5]. Esta transformación \mathcal{L} establece un orden lexicográfico inverso en los elementos de un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ . Bajo ciertos criterios \mathcal{L} permite seleccionar un subconjunto Δ de ξ compuesto por n n -tuplas linealmente independientes, este subconjunto Δ se considera como la entrada del algoritmo n dimensional. Además se incorporan ejemplos específicos que permiten ilustrar la acción del algoritmo sobre variedades tóricas de dimensión 3. Esta presentación visual mediante ejemplos concretos contribuirá significativamente a una mejor comprensión de cómo la iteración finita del algoritmo resuelve las singularidades.

Particularmente, en el Capítulo 1, se revisan las definiciones y resultados clásicos de la teoría de variedades tóricas que son importantes para comprender los capítulos subsiguientes.

El Capítulo 2 se estructura en 2 secciones. En la primera sección, se presentan las definiciones, ejemplos y resultados principales de la modificación de Nash aplicada a variedades tóricas. En la segunda sección, se presenta el algoritmo multidimensional propuesto por Grigoriev y Milman en [13], y se definen nuestros principales objetos de estudio, tales como: el \mathcal{L} -valor, \mathcal{L}_k -valor, \mathcal{L} -orden, orden canónico y \mathcal{L} -algoritmo. En conjunto estas definiciones permiten establecer criterios para escoger la entrada del algoritmo. Además demostraremos que la salida del algoritmo corresponde a un nuevo conjunto de exponentes monomiales esencial ξ^1 .

En el Capítulo 3, iniciamos recordando el resultado de Duarte en [5] para dimensión 2. La demostración de este resultado conlleva la iteración del algoritmo de Nash, siguiendo elecciones de pares de vectores no colineales, bajo una transformación lineal de la forma $L(x, y) = ax + by$. Posteriormente, tras un número finito de iteraciones, se obtiene un nuevo conjunto de exponentes monomiales para una de las cartas afines de la modificación de Nash. A continuación, nos enfocamos en el objetivo central de este capítulo, el cual consiste en una generalización parcial de dicho resultado a variedades tóricas de dimensión 3.

Capítulo 1

Preliminares sobre variedades tóricas

En este capítulo estudiaremos definiciones y resultados de la teoría de variedades tóricas que son necesarias para los próximos capítulos, comenzamos con la teoría clásica como es presentada en [3], y en [8].

1. Variedades Tóricas Afín

Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la variedad afín $(\mathbb{C}^*)^n$ es un grupo bajo la multiplicación componente a componente.

DEFINICIÓN 1.1. *Un **Toro** \mathbb{T} es una variedad afín isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$ para algún n , donde \mathbb{T} hereda una estructura de grupo del isomorfismo.*

EJEMPLO 1. *Sea $V = V(x^2 - y) \subset \mathbb{C}^2$, consideremos $V_{xy} = V \cap (\mathbb{C}^*)^2$, como V_{xy} es el gráfico de la aplicación $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $t \mapsto t^2$, el morfismo $\mathbb{C}^* \rightarrow V_{xy}$ dado por $t \mapsto (t, t^2)$ es biyectivo, y este isomorfismo da a V_{xy} la estructura de grupo de \mathbb{C}^* por $(a, a^2)(b, b^2) = (ab, (ab)^2)$.*

DEFINICIÓN 1.2. *Un **caracter** de un toro \mathbb{T} es un morfismo $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ que es un homomorfismo de grupos.*

EJEMPLO 2. *Sea $m = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, el caracter $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ esta definido por*

$$\chi^m(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n}.$$

En el capítulo 16 de [18], se demuestra que todos los caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ surgen de esta manera, así los caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ forman un grupo isomorfo a \mathbb{Z}^n .

DEFINICIÓN 1.3. *Un **subgrupo uno-parámetro** de un toro \mathbb{T} es un morfismo $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$ que es un homomorfismo de grupos.*

EJEMPLO 3. *El subgrupo uno-parámetro definido por $u = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ es $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$, donde $t \mapsto (t^{b_1}, t^{b_2}, \dots, t^{b_n})$.*

En el capítulo 16 de [18] también se demuestra que todo subgrupo uno-parámetro surge de esta manera, y por lo tanto el subgrupo uno-parámetros de $(\mathbb{C}^*)^n$ es también isomorfo a \mathbb{Z}^n .

Es habitual decir que $m \in M$ da el caracter $\chi^m : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ y que $u \in N$ da el subgrupo uno-parámetro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$.

Notemos que existe un par bilineal natural $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por

- Dado un caracter χ^m y un subgrupo uno-parámetro λ^u , la composición $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es un caracter de \mathbb{C}^* dado por $t \mapsto t^l$ para $l \in \mathbb{Z}$. Luego $\langle m, u \rangle = l$.
- Si $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ con $m = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}$ y $u = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

De acuerdo con el capítulo 1 de [3], los caracteres y subgrupos uno-parámetro de un toro \mathbb{T} forman los grupos abelianos libre M y N de rango finito con el par $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ que identifica N con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y a M con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

Desde este punto de vista, el isomorfismo $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^n$ induce los isomorfismo $M \cong \mathbb{Z}^n$ y $N \cong \mathbb{Z}^n$.

DEFINICIÓN 1.4. *Un **reticulado** es un grupo abeliano libre de rango finito, entonces un reticulado de rango n es isomorfo a \mathbb{Z}^n .*

De la definición anterior, dado un toro arbitrario \mathbb{T} , M , es llamado el **reticulado de caracteres** de \mathbb{T} y N es llamado el **reticulado de subgrupo uno-parámetro** de \mathbb{T} . Además N es el dual de M .

DEFINICIÓN 1.5. *Una **variedad tórica afín** es una variedad afín irreducible V que contiene un toro \mathbb{T} como un subconjunto abierto de la topología de Zariski, tal que la acción de \mathbb{T} sobre si mismo se puede extender a una acción algebraica de \mathbb{T} a V . Por acción algebraica nos referimos a una acción $T \times V \rightarrow V$ dada por un morfismo.*

EJEMPLO 4.

1. La curva plana $V_1 := V(x^2 - y) \subset \mathbb{C}^2$ del Ejemplo 1, es una variedad tórica afín que contiene al toro:

$$V_1 \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t, t^2) \mid t \neq 0\} \cong \mathbb{C}^*,$$

como un subconjunto abierto. La acción del toro en si mismo se extiende a V mediante $(a, b) \in V$; con $(t, t^2)(a, b) = (ta, t^2b)$.

2. La curva plana $V_2 = V(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$, es una variedad tórica afín con toro:

$$V_2 \setminus \{0\} = V_2 \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*,$$

donde el isomorfismo es $t \mapsto (t^2, t^3)$.

3. La variedad $V_3 = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$, es una variedad tórica con toro:

$$V_3 \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^3,$$

donde el isomorfismo es $(t_1, t_1, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$.

Dado un toro \mathbb{T} con reticulado de caracteres M y un conjunto

$$\xi := \{m_1, m_2, \dots, m_s\} \subset M,$$

cada m_i nos da el caracter $\chi^{m_i} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C}^r \\ t &\longmapsto (\chi^{m_1}(t), \chi^{m_2}(t), \dots, \chi^{m_2}(t)) \in \mathbb{C}^s. \end{aligned}$$

La clausura $\Phi_\xi(\mathbb{T})$ en la topología de Zariski, denotada por X_ξ , es una variedad tórica afín, cuyo toro tiene como reticulado de caracteres al subreticulado $\mathbb{Z}\xi \subseteq M$. En particular, la dimensión de X_ξ es igual al rango de $\mathbb{Z}\xi$, veremos que cada variedad tórica afín es isomorfa a X_ξ , para algún subconjunto finito ξ de un reticulado.

Dada la variedad tórica afín X_ξ , el conjunto ξ induce la aplicación $\widehat{\phi}_\xi : \mathbb{Z}^r \rightarrow M$, que envía la base estándar e_1, \dots, e_r a m_1, \dots, m_r . Sea L el kernel de $\widehat{\phi}_\xi$. Entonces el ideal de la variedad tórica afín X_ξ es:

$$I(X_\xi) = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \wedge \alpha - \beta \in L \rangle, \quad (1.1)$$

donde $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r}$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $L \subseteq \mathbb{Z}^r$ un sub-reticulado.

1. El ideal $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \wedge \alpha - \beta \in L \rangle$ es llamado el **ideal reticulado**.
2. Un ideal reticulado primo es llamado **ideal tórico**.

EJEMPLO 5.

1. Como las variedades tóricas son irreducibles, los ideales como en (1.1) son ideales tóricos.
2. $\langle x^3 - y^2 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y]$.
3. $\langle xz - yw \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z, w]$.

Notemos que en cada ejemplo, tenemos un ideal principal generado por binomios, la siguiente proposición muestra que tales ideales son automáticamente tóricos.

PROPOSICIÓN 1.1. Un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$ es tórico si y sólo si es primo y generado por binomios.

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposición 1.1.11, en [3]. □

Más tarde veremos que toda variedad tórica afín surge de un ideal tórico.

1.1. Semigrupo afín.

DEFINICIÓN 1.7. Un **semigrupo** es un conjunto S con una operación binaria (+) asociativa y un elemento de identidad (0). Para que S sea un **semigrupo afín** también requerimos que:

- El semigrupo está finitamente generado, es decir, existe un conjunto finito $\xi \subset S$ tal que $\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi = S$.
- El semigrupo se puede incrustar en el reticulado M .

EJEMPLO 6.

1. El ejemplo más simple de un semigrupo afín es $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \subseteq \mathbb{Z}^n$.
2. Dado un reticulado M y un conjunto finito $\xi \subseteq M$, se obtiene el semigrupo afín $\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi \subseteq M$. Módulo isomorfismo, todos los semigrupos afines son de esta forma.

DEFINICIÓN 1.8. Dado un semigrupo afín $S \subset M$, definimos la \mathbb{C} -álgebra de semigrupo, denotada por $\mathbb{C}[S]$, como el espacio vectorial sobre \mathbb{C} con S como base y multiplicación inducida por la estructura de semigrupo de S . Más precisamente, si M es el reticulado de caracteres de un toro \mathbb{T} y $m \in M$ da el caracter χ^m , entonces

$$\mathbb{C}[S] := \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C} \wedge c_m = 0 \text{ para todos excepto un número finito } m \right\},$$

con multiplicación inducida por $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$.

EJEMPLO 7. El semigrupo afín $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \subset \mathbb{Z}^n$ da el anillo de polinomios

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_{\geq 0}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

donde $x_i = \chi^{e_i}$ y e_1, \dots, e_n es la base estándar de \mathbb{Z}^n .

PROPOSICIÓN 1.2. Sea $S \subseteq M$ un semigrupo afín. Entonces

- (a) $\mathbb{C}[S]$ es un dominio de integridad y finitamente generado como una \mathbb{C} -álgebra.
- (b) $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es una variedad tórica cuyo toro tiene reticulado de caracteres $\mathbb{Z}S$, y si $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}\xi$ para un conjunto finito $\xi \subseteq M$, entonces $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = X_\xi$.

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposición 1.1.14, en [3]. □

EJEMPLO 8. Consideremos el semigrupo afín $S \subset \mathbb{Z}$ generado por 2 y 3, así $S = \{0, 2, 3, \dots\}$. Si $\xi = \{2, 3\}$, entonces $\Phi_\xi(t) = (t^2, t^3)$ y el ideal tórico es $I(X_\xi) = \langle x^3 - y^2 \rangle$, entonces

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \cong \mathbb{C}[x, y] / \langle x^3 - y^2 \rangle,$$

y la variedad tórica afín X_ξ es la curva $x^3 = y^2$.

Para finalizar, enunciamos el resultado principal de este capítulo, el cual afirma que los diversos enfoques a las variedades tóricas afines conducen a la misma clase de objetos.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea V una variedad afín, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. V es una variedad tórica afín como se acordó en la Definición 1.5.
2. $V = X_\xi$ para algún conjunto finito en el reticulado.
3. V es una variedad afín definida por un ideal tórico.
4. $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ para un semigrupo afín S .

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 1.1.17 en [3]. □

Es importante señalar que la definición de variedad tórica afín no depende de la elección del conjunto ξ en el siguiente sentido. Consideremos el semigrupo $\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi$, como es finitamente generado, este semigrupo determina la \mathbb{C} -álgebra finitamente generada

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi] := \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \chi^{m_2}, \dots, \chi^{m_r}],$$

con la multiplicación inducida por $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, entonces

$$X_\xi = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi].$$

En particular, si ξ y ξ' son dos subconjuntos de M que satisfacen $\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi = \mathbb{Z}_{\geq 0}\xi'$, se tiene que $X_\xi = X_{\xi'}$.

La Modificación de Nash

1. La Modificación de Nash como un algoritmo combinatorial

Comenzamos el capítulo dando algunas definiciones y ejemplos básicos acerca de la modificación de Nash, definiremos nuestro principal objeto de estudio y se ilustrarán algunos resultados importantes.

1.1. Definiciones básicas y ejemplos.

DEFINICIÓN 2.1. *Una resolución de singularidades de una variedad singular X es:*

- (1) *Un morfismo propio birracional $\varphi : Y \rightarrow X$,*
- (2) *Y es una variedad no singular,*
- (3) *$Y \setminus \varphi^{-1}(\text{Sing}(X)) \cong X \setminus \text{Sing}(X)$, donde $\text{Sing}(X)$ denota el lugar singular de X .*

Consideremos una variedad algebraica irreducible X de dimensión m en \mathbb{C}^r y la aplicación de Gauss, que asocia a cada punto no singular el espacio tangente a la variedad en dicho punto:

$$\begin{aligned} G: X \setminus \text{Sing}(X) &\longrightarrow G(m, r) \\ x &\longmapsto T_x X, \end{aligned}$$

donde $G(m, r)$ es el Grassmaniano de los espacios vectoriales m -dimensionales en \mathbb{C}^r , y $T_x X$ el espacio tangente a X en x .

Denotemos por $\mathcal{N}^1 X$ a la clausura del gráfico de G en la topología de Zariski, es decir:

$$\mathcal{N}^1 X := \overline{gr(G)} = \overline{\{(p, T_p X) \mid p \in X \setminus \text{Sing}(X)\}},$$

y llamemos v a la aplicación $\mathcal{N}^1 X \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^1 X & \hookrightarrow & X \times G(m, r) \\ & \searrow v & \downarrow pr_X \\ & & X \end{array}$$

DEFINICIÓN 2.2. Llamamos **la modificación de Nash de X** al par $(\mathcal{N}^1 X, v)$.

OBSERVACIÓN 1. Si consideramos una secuencia de puntos suaves $\{x_i\} \subset X$ que convergen a un punto no singular y sus respectivos espacios tangentes $T_{x_i} X$, la variedad algebraica $\mathcal{N}^1 X$ separa los puntos singulares de X , en función de todos los límites de espacios tangentes posibles.

- Si $x \in X$ es un punto no singular, entonces la fibra $v^{-1}(x)$ es únicamente el punto y su tangente es decir, $\{(x, T_x X)\}$.
- Si x es un punto singular, la fibra $v^{-1}(x)$ consiste en todos los límites de espacios tangentes de X a lo largo de la secuencia de puntos no singulares que tienden a x , es decir $\{(x, T) \mid T \text{ es el límite de espacios tangentes}\}$. El hecho de estar considerando la clausura, permite considerar todos los límites posibles.

Nobile en [19] prueba que la Modificación de Nash es independiente de la incrustación de X en el espacio afín \mathbb{A}^r .

Por otro lado, la aplicación $v : \mathcal{N}^1 X \rightarrow X$ es un morfismo propio birracional que induce una biyección entre $\mathcal{N}^1 X \setminus v^{-1}(\text{Sing}(X))$ y $X \setminus \text{Sing}(X)$. Entonces, dada una variedad singular X , aplicando la modificación de Nash obtenemos:

$$X \xleftarrow{\nu_0} \mathcal{N}^1 X,$$

donde ν_0 satisface las condiciones (1) y (3) de una resolución de singularidades según la Definición 2.1. Para completar la resolución de las singularidades de X , sólo nos bastaría conocer si $\mathcal{N}^1 X$ tiene o no singularidades. Si $\mathcal{N}^1 X$ es no singular el proceso termina, y si $\mathcal{N}^1 X$ presenta singularidades, volvemos a aplicar la modificación de Nash.

De esta manera el proceso de aplicar la modificación de Nash a cada variedad algebraica no singular que se genera, obtenemos el siguiente secuencia:

$$X \xleftarrow{v_0} \mathcal{N}^1 X \xleftarrow{v_1} \mathcal{N}^2 X \xleftarrow{v_2} \dots \xleftarrow{v_{i-1}} \mathcal{N}^i X \xleftarrow{v_i} \dots$$

donde $\mathcal{N}^k X := \mathcal{N}^1(\mathcal{N}^{k-1} X)$.

Es natural preguntarnos si mediante la iteración finita de la modificación de Nash, obtenemos una resolución de singularidades. Algunos resultados parciales a esta pregunta, son los siguientes:

- Nobile en [19] y Teissier en [29], demuestran que sobre un cuerpo k de característica cero, $\mathcal{N}^1 X$ es isomorfo a X si y sólo si X es no singular, consecuencia de este resultado es que para el caso de curvas, el Método de Nash resuelve las singularidades con una iteración finita.
- Rebasoo en [25], demuestra que la iteración de la modificación de Nash resuelve las singularidades de la familia $\{z^p - x^p y^r = 0\}$ para p , q y r en \mathbb{N} . No obstante, en el caso de variedades de dimensión mayor o igual a dos es un problema abierto, incluso para las superficies tóricas.
- Debido a que el Método de Nash no conserva la normalidad de una variedad, nace una variación del Método Nash es la Modificación de Nash Normalizada, que consiste en una iteración de la Modificación de Nash seguido por Normalización, aquí se ha avanzado bastante, ya que H. Hironaka probó que después de una iteración finita de la Modificación de Nash Normalizada, toda singularidad de superficie es transformada en una singularidad Sandwich, y finalmente M. Spivakovsky demostró que en dimensión 2, toda singularidad Sandwich es resuelta a través de la Modificación de Nash Normalizada.

Ahora veamos un ejemplo de la modificación de Nash.

EJEMPLO 9. [Modificación de Nash]

Consideremos la variedad $C = \{y^m - x^n = 0\}$ con $m < n$, cuyo único punto singular es el origen y un punto arbitrario no singular $p := (x_0, y_0)$ sobre C .

El espacio tangente en el punto p está dado por:

$$T_p C = \{(x, y) \mid -nx_0^{n-1}x + my_0^{m-1}y = 0\},$$

como el punto $p = (x_0, y_0)$ es no singular, entonces $T_p C$ es una recta que pasa por el origen, y por lo tanto la podemos analizar como un punto en el plano proyectivo:

$$T_p C = [my_0^{m-1} : nx_0^{n-1}]$$

para mejorar este representante, primero multiplicamos por y_0 , luego reemplazamos y^m por x^n (ya que $y^m - x^n = 0$) y finalmente multiplicamos por $\frac{1}{x_0^{n-1}}$.

$$\begin{aligned} T_p C &= [(my_0^m : nx_0^{n-1}y_0], \\ &= [mx_0^n : nx_0^{n-1}y_0], \\ &= [mx_0 : ny_0], \end{aligned}$$

luego, por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^1 C &= \overline{\{(x, y), [mx : ny] \in C \times \mathbb{P}^1 \mid (x, y) \in C \setminus \text{Sing}(C)\}}, \\ &= \overline{\{(x, y), [mx : ny] \in C \times \mathbb{P}^1 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}}. \end{aligned}$$

Recordemos que un espacio proyectivo de dimensión n puede cubrirse por $n + 1$ cartas afín,

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n,$$

donde $U_i := \{[x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. Como $\mathcal{N}^1 C \subset C \times \mathbb{P}^1$, analizando sus cartas afín, se puede estudiar si $\mathcal{N}^1 C$ es o no singular.

Si $V_i := C \times U_i$ entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^1 C \cap V_0 &= \overline{\left\{ \left(x, y, \frac{ny}{mx} \right) \in k^3 \mid y^m - x^n = 0, (x, y) \neq (0, 0) \right\}}, \\ &\subset \left\{ (x, y, u) \in k^3 \mid \frac{m}{n} xu = y, y^m - x^n = 0 \right\}, \\ &= \left\{ (x, u) \in k^2 \mid \left(\frac{m}{n} xu \right)^m - x^n = 0 \right\}, \\ &= \left\{ (x, u) \in k^2 \mid x^m \left(\left(\frac{m}{n} u \right)^m - x^{n-m} \right) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ (x, u) \mid \left(\frac{m}{n} u \right)^m - x^{n-m} = 0 \right\} \cup \left\{ x^m = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{N}^1 C \cap V_0$ es irreducible, necesariamente:

$$\mathcal{N}^1 C \cap V_0 = \left\{ (x, u) \mid \left(\frac{m}{n} u \right)^m - x^{n-m} = 0 \right\},$$

mediante el cambio de variable adecuado, se puede escribir como:

$$\mathcal{N}^1 C \cap V_0 = \left\{ (x, t) \mid t^m - x^{n-m} = 0 \right\}.$$

En esta carta afin de $\mathcal{N}^1 C$ obtuvimos otra curva que es un poco menos singular, ya que los exponentes acaban de bajar, una iteración nos produjo el mismo tipo de curva pero con cierta mejora, entonces aplicando más iteraciones, finalmente obtendremos otra curva con uno de los exponentes igual a 1, la cual es no singular.

En la próxima definición introduciremos el objeto principal de estudio. Dado un conjunto $\xi := \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^n$, consideraremos el grupo

$$\mathbb{Z}\xi := \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

y el semigrupo

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi := \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

generado por ξ .

DEFINICIÓN 2.3. Sea $\xi := \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^n$ tal que $\mathbb{Z}\xi = \mathbb{Z}^n$.

Consideremos la siguiente aplicación monomial:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : (k^*)^n &\longrightarrow k^r \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x^{\gamma_1}, \dots, x^{\gamma_r}), \end{aligned}$$

donde $x^{\gamma_k} := x_1^{\gamma_{k,1}} \cdots x_n^{\gamma_{k,n}}$ y $\gamma_k = (\gamma_{k,1}, \dots, \gamma_{k,n})$, para $k = 1, \dots, r$.

- i. Definimos la variedad tórica afín $X := \overline{\Phi_\xi((k^*)^n)}$, correspondiente a la clausura de la imagen de Φ_ξ en la topología de Zariski.
- ii. Llamamos a ξ un conjunto de exponentes monomiales de X .
- iii. Sea $\text{Conv}(\xi)$ la cápsula convexa de ξ en \mathbb{R}^n . Si $\mathbf{0} \notin \text{Conv}(\xi)$, decimos que X es una variedad tórica afín esencial y ξ un conjunto de exponentes monomiales esencial.
- iv. El conjunto reducido de ξ , $\text{Red}(\xi)$, es el conjunto de vectores de ξ que no se pueden escribir como la suma de elementos del semigrupo $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\xi)$, es decir:

$$\text{Red}(\xi) := \{\gamma \in \xi \mid \text{no existe } \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\xi \text{ tal que } \gamma = \delta_1 + \delta_2\}.$$

PROPOSICIÓN 2.1. Una variedad tórica afín X es esencial ($\mathbf{0}_n \notin \text{Conv}(\xi)$) si y sólo si $\mathbf{0} \in X$.

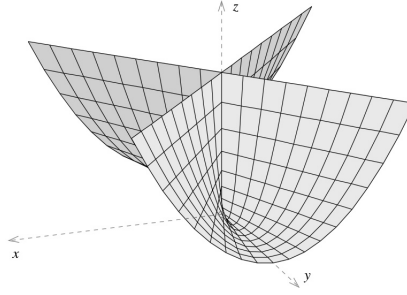
DEMOSTRACIÓN. Consultar en [13] Afirmación 3.2. □

EJEMPLO 10. [Paragua de Whitney]

Consideremos el conjunto de exponentes monomiales $\xi = \{(1, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ este conjunto induce la siguiente aplicación monomial:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : (k^*)^2 &\longrightarrow k^3 \\ (u, v) &\longmapsto ((u, v)^{(1,0)}, (u, v)^{(1,1)}, (u, v)^{(0,2)}) \\ &= (u^1 v^0, u^1 v^1, u^0 v^2) \\ &= (u, uv, v^2) \end{aligned}$$

la superficie tórica asociada es $X = \{(x, y, z) \in k^3 \mid x^2 z - y^2 = 0\}$.

FIGURA 1. Superficie tórica asociada a ξ .

Los puntos singulares de X están determinados por las ecuaciones:

$$\frac{\partial(x^2z - y^2)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2z - y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2z - y^2)}{\partial z} = x^2z - y^2 = 0,$$

entonces

$$2xz = -2y = x^2 = x^2z - y^2 = 0,$$

luego el lugar singular de X es $\text{Sing}(X) = \{(0, 0, z)\}$.

Sea $p \in X \setminus \text{Sing}(X)$, digamos $p := (x_0, y_0, z_0)$ entonces

$$T_p X = \{(x, y, z) \mid 2x_0z_0x - 2y_0y + x_0^2z = 0\},$$

viendo el espacio tangente como un punto en $G(2, 3)$ nos queda:

$$T_p X = [x_0^2 : -2y_0 : 2x_0z_0]$$

y como $p = (x_0, y_0, z_0)$ debe tener la forma (u, uv, v^2) para cumplir con la parametrización de X nos queda:

$$\begin{aligned} T_p X &= [u^2 : -2uv : 2uv^2] \\ &= [u : -2v : 2v^2]. \end{aligned}$$

Por definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^1 X &= \overline{\text{gr}(G)}, \\ &= \overline{\{(p, T_p X) \mid p \in X \setminus \text{Sing}(X)\}}, \\ &= \overline{\left\{ \left((u, uv, v^2), [u : -2v : 2v^2] \right) \in X \times \mathbb{P}^2 \mid (u, uv, v^2) \in X \setminus \text{Sing}(X) \right\}}, \\ &\cong \overline{\left\{ \left((u, uv, v^2), [u : -2v : 2v^2] \right) \in X \times \mathbb{P}^2 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}. \end{aligned}$$

Dado que los conjuntos $(k^*)^2$ y $X \setminus \text{Sing}(X)$ son densos en X , podemos escribir $(k^*)^2$ en lugar de $X \setminus \text{Sing}(X)$ en la definición de $\mathcal{N}^1 X$.

Luego, como $\mathcal{N}^1 X \subset X \times \mathbb{P}^2$, consideraremos las cartas afines U_0, U_1 y U_2 de \mathbb{P}^2 y estudiaremos si $\mathcal{N}^1 X$ tiene singularidades analizando las cartas afines $V_i := X \times U_i$ para $i = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^1 X \cap V_0 &\cong \overline{\left\{ \left(u, uv, v^2, \frac{-2v}{u}, \frac{2v^2}{u} \right) \in k^5 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}, \\ &\cong \overline{\left\{ \left(u, uv, v^2, -2u^{-1}v, 2u^{-1}v^2 \right) \in k^5 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}. \end{aligned}$$

Usando el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: \quad k^5 &\longrightarrow k^5 \\ (x, y, z, w, t) &\longmapsto \left(x, y, z, \frac{w}{-2}, \frac{t}{2} \right), \end{aligned}$$

obtenemos que:

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_0 \cong \overline{\left\{ \left(u, uv, v^2, u^{-1}v, u^{-1}v^2 \right) \in k^5 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}.$$

De forma análoga, obtenemos las restantes cartas afines de $\mathcal{N}^1 X$:

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_1 \cong \overline{\left\{ \left(u, uv, v^2, uv^{-1}, v \right) \in k^5 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}.$$

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_2 \cong \overline{\left\{ \left(u, uv, v^2, uv^{-2}, v^{-1} \right) \in k^5 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}.$$

Por otro lado, recordemos que el conjunto de exponentes monomiales es

$$\xi = \{\gamma_1 := (1, 0), \gamma_2 := (1, 1), \gamma_3 := (0, 2)\}.$$

Definamos los conjuntos:

$$\begin{aligned}\xi_{12} &:= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3 - \gamma_2, \gamma_3 - \gamma_1\}, \\ &= \{(1, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 1), (-1, 2)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{13} &:= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_2 - \gamma_3, \gamma_2 - \gamma_1\}, \\ &= \{(1, 0), (1, 1), (0, 2), (1, -1), (0, 1)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{23} &:= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1 - \gamma_3, \gamma_1 - \gamma_2\}, \\ &= \{(1, 0), (1, 1), (0, 2), (1, -2), (0, -1)\}.\end{aligned}$$

Notemos que el conjunto de exponentes monomiales ξ_{12} induce la aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi_{12}}: (k^*)^2 &\longrightarrow k^5 \\ (u, v) &\longmapsto ((u, v)^{(1,0)}, (u, v)^{(1,1)}, (u, v)^{(0,2)}, (u, v)^{(-1,1)}, (u, v)^{(-1,2)}) \\ &= (u, uv, v^2, u^{-1}v, u^{-1}v^2).\end{aligned}$$

tal que

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_0 \cong \overline{\Phi_{\xi_{12}}((k^*)^2)}.$$

De modo similar se obtiene que:

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_1 \cong \overline{\Phi_{\xi_{13}}((k^*)^2)} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}^1 X \cap V_2 \cong \overline{\Phi_{\xi_{23}}((k^*)^2)}.$$

Estas congruencias ilustran que las cartas afín de la Modificación de Nash de X son superficies tóricas afines.

Por otro lado, aunque X es esencial, en una de las cartas afín de $\mathcal{N}^1 X$ no lo es, ya que $(0, 0) \in \text{Conv}(\xi_{23})$. Sin embargo, en [11], sección 4, ejemplo 5, está probado que:

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_2 \subset \mathcal{N}^1 X \cap V_1,$$

y como $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi_{12})$ y $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi_{13})$, concluimos que $\mathcal{N}^1 X$ está cubierta por superficies tóricas afines esencial.

El ejemplo del paraguas de Whitney ilustra el siguiente hecho general.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea X una variedad tórica afín esencial, entonces $\mathcal{N}^1 X$ está cubierta por variedades tóricas afines esenciales.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [13] construcción 4.5 y afirmación 4.6.

□

La Proposición 2.2 permite hacer iteraciones de este proceso, ya que al comenzar con una variedad tórica esencial X , la modificación de Nash genera una variedad tórica esencial. La pregunta que surge ahora es : ¿cuándo nos detenemos?, la respuesta nos la da el siguiente resultado obtenido en [13] criterio 3.16.

PROPOSICIÓN 2.3. *Una variedad tórica esencial X de dimensión n dada por algún conjunto de exponentes monomiales ξ es no singular si y sólo si el conjunto ξ tiene asociado un conjunto minimal de exponentes monomiales $\text{Red}(\xi)$ con n elementos.*

En resumen, si comenzamos con una variedad tórica esencial X de dimensión n , las proposiciones 2.2 y 2.3 muestran que la iteración de la modificación de Nash está descrita mediante un algoritmo que se detiene cuando un conjunto de exponentes monomiales esencial resultante ξ' , satisface que $\text{Red}(\xi')$ tiene cardinalidad n .

2. \mathcal{L} -Algoritmo de Nash n dimensional

A continuación, procederemos a proporcionar una descripción del algoritmo multidimensional presentado en la sección 4 del artículo [13].

2.1. Algoritmo n dimensional. Para $n \geq 1$, consideremos el conjunto minimal de exponentes monomiales $\xi \subset \mathbb{Z}^n$ asociado a alguna variedad tórica (ver Definición 2.3), tal que $Z\xi = \mathbb{Z}^n$ y $\mathbf{0}_n \notin \text{Conv}(\xi)$. Denotemos por $\mathcal{S}(\xi)$ al conjunto de todas las n -tuplas de vectores linealmente independientes en $\xi = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ con $r > n$.

- La **entrada** es el conjunto ξ y una colección fija $\Delta_J = \{\gamma_{J_1}, \gamma_{J_2}, \dots, \gamma_{J_n}\} \in \mathcal{S}(\xi)$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ generamos el conjunto:

$$\mathcal{A}(\xi, \gamma_{J_i}) = \{\gamma - \gamma_{J_i} \mid \gamma \in \xi \setminus \Delta_J \text{ tal que } \det(\gamma_{J_1}, \gamma_{J_2}, \dots, \gamma_{J_{i-1}}, \gamma, \gamma_{J_{i+1}}, \dots, \gamma_{J_n}) \neq 0\}$$

Luego construimos el conjunto:

$$\xi^1 = \text{Red} \left(\xi \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}(\xi, \gamma_{J_i}) \right) \right).$$

(ver apartado iv. de la Definición 2.3).

- Si $\mathbf{0}_n \in \text{Conv}(\xi^1)$, descartamos Δ_J y fijamos otro $\Delta_{J'} \in \mathcal{S}(\xi)$.
 - Si $\mathbf{0}_n \notin \text{Conv}(\xi^1)$ entonces este conjunto es un conjunto de exponentes monomiales para una carta afín de la Modificación de Nash de X .
- La **salida** corresponde al conjunto de exponentes monomiales esencial ξ^1 .

Notemos que siempre existe al menos una colección $\Delta \in \mathcal{S}(\xi)$ tal que ξ^1 es esencial, pues la Proposición 2.2, indica que la Modificación de Nash de X está cubierta por cartas afines esenciales.

En la Proposición 2.5 se establecerá un método canónico para seleccionar una colección $\Delta \in \mathcal{S}(\xi)$ y se verifica que al aplicar el algoritmo 2.1 conforme a esta elección, se generará un conjunto de exponentes monomiales esencial.

Al emplear el conjunto de salida como un nuevo conjunto de entrada, se establece un proceso algorítmico. Denotaremos por ξ^k al conjunto de exponentes monomiales esencial obtenido en la k -ésima salida del algoritmo.

La finalización del algoritmo ocurre cuando el conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi^k \subset \mathbb{Z}^n$ alcanza una cardinalidad de n vectores, ya que, según la Proposición 2.3, la variedad tórica asociada a ξ^k resulta no singular.

Consideremos las siguientes funciones lineales:

$$\mathcal{L}_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{1,k}x_1 + a_{2,k}x_2 + \dots + a_{n,k}x_n, \quad a_{j,k} \in \mathbb{R} \text{ y } k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

tales que $\mathcal{L}_k(\mathbf{0}_n) = 0$ y el determinante de la siguiente matriz es diferente de cero

$$L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

El \mathcal{L} -orden sobre \mathbb{Z}^n es el orden lexicográfico inverso dado por la n -tupla $\mathcal{L} := (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}^n$ diremos que: $\gamma_1 \leq_{\mathcal{L}} \gamma_2$ cuando existe $\kappa \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{L}_\kappa(\gamma_1) < \mathcal{L}_\kappa(\gamma_2)$ y $\mathcal{L}_l(\gamma_1) = \mathcal{L}_l(\gamma_2)$ para todo $l > \kappa$, el caso $\kappa = n$, corresponde simplemente a $\mathcal{L}_n(\gamma_1) < \mathcal{L}_n(\gamma_2)$.

OBSERVACIÓN 2. *El \mathcal{L} -orden es un orden total para \mathbb{Z}^n . Por abuso de notación, en lugar de emplear la expresión $\gamma_1 \leq_{\mathcal{L}} \gamma_2$, usaremos la notación $\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2)$.*

DEFINICIÓN 2.4. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales, diremos que un \mathcal{L} -orden es admisible para ξ (o simplemente \mathcal{L} -orden para ξ), si para todo $\gamma \in \xi$ se tiene que existe $\kappa \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{L}_\kappa(\gamma) > 0$ y $\mathcal{L}_l(\gamma) = 0$ para todo $l > \kappa$.*

Note que la definición 2.4 no establece ninguna condición para $\mathcal{L}_j(\gamma)$ con $j < k$, es decir $\mathcal{L}_j(\gamma) \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Todo conjunto de exponentes monomiales esencial admite un \mathcal{L} -orden admisible .*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que un conjunto de exponentes monomiales es esencial, cuando existe un hiperplano $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que ξ está contenido en $H^+(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Luego si definimos

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \mathcal{L}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = H(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

donde $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ nos linealmente independientes, se tiene que \mathcal{L} -orden inducido por \mathcal{L} es admisible, pues para todo $\gamma \in \xi$ se tiene que $\mathcal{L}_n(\gamma) > 0$. \square

DEFINICIÓN 2.5. *Para $\gamma \in \xi \subset \mathbb{Z}^n$, definimos el \mathcal{L}_k -valor de γ como la imagen de γ bajo $\mathcal{L}_k \in (\mathbb{R}^n)^\vee$.*

DEFINICIÓN 2.6. *Dado un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ , diremos que un \mathcal{L} -orden admisible es canónico si la matriz L es una matriz con coeficientes enteros y determinante ± 1 .*

OBSERVACIÓN 3. *Dado un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ , y un \mathcal{L} -orden admisible canónico para ξ . Entonces la aplicación lineal:*

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = (\mathcal{L}_1(\mathbf{x}), \mathcal{L}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{L}_n(\mathbf{x})), \quad (2.1)$$

con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, es un automorfismo de \mathbb{Z} -módulo que respeta el orden inducido por \mathcal{L} . Luego, para cada elemento $\mathcal{T}(\gamma) \in \mathcal{T}(\xi)$, podemos considerar el \mathcal{L}' -orden inducido por:

$$\mathcal{L}'(\mathcal{T}(\gamma)) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

es decir, el \mathcal{L}'_k -valor del elemento $\mathcal{T}(\gamma) \in \mathcal{T}(\xi)$ corresponde a la k -ésima coordenada de $\mathcal{T}(\gamma)$. Además, se cumple que:

$$\mathcal{T}(\xi) \subset \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

EJEMPLO 11. *Consideremos el conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi = \{\delta_1 = (1, -1, 0), \delta_2 = (0, 1, -1), \delta_3 = (1, 0, 0), \delta_4 = (2, 0, 1)\} \subset \mathbb{Z}^3$ y las funciones lineales:*

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = x + y, \mathcal{L}_3(x, y, z) = x + y + z)$$

notemos que:

- $\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_2)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_1) = \mathcal{L}_3(\delta_2)$ y $\mathcal{L}_2(\delta_1) < \mathcal{L}_2(\delta_2)$.
- $\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_3)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_1) < \mathcal{L}_3(\delta_3)$.
- $\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_4)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_1) < \mathcal{L}_3(\delta_4)$.
- $\mathcal{L}(\delta_2) < \mathcal{L}(\delta_3)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_2) < \mathcal{L}_3(\delta_3)$.
- $\mathcal{L}(\delta_2) < \mathcal{L}(\delta_4)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_2) < \mathcal{L}_3(\delta_4)$.
- $\mathcal{L}(\delta_3) < \mathcal{L}(\delta_4)$, pues $\mathcal{L}_3(\delta_3) < \mathcal{L}_3(\delta_4)$.

luego el \mathcal{L} -orden sobre ξ inducido por \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_2) < \mathcal{L}(\delta_3) < \mathcal{L}(\delta_4).$$

Por otro lado, la matriz $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene coeficiente enteros y determinante 1, entonces el \mathcal{L} -orden inducido por \mathcal{L} es canónico. Aplicando el automorfismo de \mathbb{Z} -módulo:

al conjunto ξ , obtenemos:

$$\mathcal{T}(\xi) = \{\mathcal{T}(\delta_1) = (1, 0, 0), \mathcal{T}(\delta_2) = (0, 1, 0), \mathcal{T}(\delta_3) = (1, 1, 1), \mathcal{T}(\delta_4) = (2, 2, 3)\},$$

observemos que el \mathcal{L} -orden canónico definido por

$$\mathcal{L}' = (\mathcal{L}'_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}'_2(x, y, z) = y, \mathcal{L}'_3(x, y, z) = z),$$

respeto el orden inducido por \mathcal{L} , en efecto

$$\mathcal{L}'(\mathcal{T}(\delta_1)) < \mathcal{L}'(\mathcal{T}(\delta_2)) < \mathcal{L}'(\mathcal{T}(\delta_3)) < \mathcal{L}'(\mathcal{T}(\delta_4)).$$

DEFINICIÓN 2.7. Dado un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ , diremos que $\Delta \in \mathcal{S}(\xi)$ es la \mathcal{L} -elección, si Δ está compuesta por las primeras n -tuplas linealmente independientes que aparecen en el orden inducido por el \mathcal{L} -valor de cada $\gamma \in \xi$.

DEFINICIÓN 2.8. El \mathcal{L} -algoritmo de Nash es el algoritmo obtenido al aplicar sucesivamente el algoritmo n -dimensional 2.1, usando en cada paso, como conjunto de entrada, la respectiva \mathcal{L} -elección. Diremos que el \mathcal{L} -algoritmo de Nash finaliza o resuelve el problema, si existe un número finito de iteraciones

tal que el algoritmo entrega un conjunto de exponentes monomiales de cardinalidad igual a n .

Dado un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ , con un \mathcal{L} -orden admisible inducido por \mathcal{L} , entonces al iterar el algoritmo n -dimensional 2.1, utilizando la \mathcal{L} -elección Δ como entrada, se genera un nuevo conjunto de exponentes monomiales ξ^1 dotado de un \mathcal{L} -orden admisible también inducido por \mathcal{L} . El siguiente resultado muestra que ξ^1 es también esencial.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea $\xi = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^n$ con $r > n$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna variedad tórica de dimensión n . Entonces el conjunto ξ^1 generado por la iteración de algoritmo n -dimensional 2.1 usando como conjunto de entrada la \mathcal{L} -elección, es también esencial.*

DEMOSTRACIÓN. Es necesario probar que la clausura convexa del conjunto de exponentes monomiales ξ^1 , obtenido en una iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash siguiendo la elección $\Delta \in \mathcal{S}(\xi)$, no incluye el origen $\mathbf{0}_n$.

Supongamos que esto es falso. Es decir, $\mathbf{0}_n \in \text{Conv}(\xi^1)$.

Sean $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r \in \xi^1$ y $t_1, \dots, t_r > 0$ números reales tales que $\sum t_j = 1$ y $\sum t_j \delta_j = \mathbf{0}_n$.

Por construcción, para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ sabemos que existe $\kappa_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{L}_{\kappa_i}(\delta_j) > 0$ y $\mathcal{L}_l(\delta_j) = 0$ para todo $l > \kappa_i$.

Como $\sum t_j \delta_j = \mathbf{0}_n$, tenemos $\sum t_i \mathcal{L}_n(\delta_j) = 0$. Luego $\mathcal{L}_n(\delta_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Sea i_0 tal que $\mathcal{L}_i(\delta_j) = 0$ para todo $i > i_0$ y $j \in \{1, \dots, r\}$. Luego $\mathcal{L}_{i_0}(\delta_j) \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. De la misma forma que antes tenemos que $\sum t_i \mathcal{L}_{i_0}(\delta_j) = 0$. Luego $\mathcal{L}_{i_0}(\delta_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Entonces por hipótesis de recurrencia obtenemos que:

$$\mathcal{L}_i(\delta_j) = 0$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Lo que es una contradicción. \square

EJEMPLO 12. Consideremos el conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi = \{\gamma_1 = (1, 0, 0), \gamma_2 = (0, 1, 0), \gamma_3 = (1, 1, 1), \gamma_4 = (2, 2, 3)\} \subset \mathbb{Z}^3$ con \mathcal{L} -orden canónico definido por $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = y, \mathcal{L}_3(x, y, z) = z)$. Desde el ejemplo 11 tenemos el orden estricto:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \mathcal{L}(\gamma_3) < \mathcal{L}(\gamma_4),$$

además como γ_1, γ_2 y γ_3 son linealmente independientes, la \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

En la primera iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, la \mathcal{L} -elección genera los conjuntos:

- $\mathcal{A}(\xi, \gamma_1) = \{\gamma_4 - \gamma_1\} = \{(1, 2, 3)\},$
- $\mathcal{A}(\xi, \gamma_2) = \{\gamma_4 - \gamma_2\} = \{(2, 1, 3)\},$
- $\mathcal{A}(\xi, \gamma_3) = \{\gamma_4 - \gamma_3\} = \{(1, 1, 2)\}.$

La salida del \mathcal{L} -algoritmo es el conjunto de exponentes monomiales esencial:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \text{Red}(\xi \cup \mathcal{A}(\xi, \gamma_1) \cup \mathcal{A}(\xi, \gamma_2) \cup \mathcal{A}(\xi, \gamma_3)), \\ &= \text{Red}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 3), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 1, 2)\}), \\ &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 1, 2)\}. \end{aligned}$$

De forma análoga, el \mathcal{L} -valor canónico de los elementos en ξ^1 induce el orden:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \mathcal{L}(\gamma_3) < \mathcal{L}(\gamma_4 - \gamma_3) < \mathcal{L}(\gamma_4 - \gamma_2) < \mathcal{L}(\gamma_4 - \gamma_1),$$

entonces para la segunda iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, la \mathcal{L} -elección del algoritmo es la terna $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. En esta iteración se generan los conjuntos

- $\mathcal{A}(\xi^1, \gamma_1) = \{\gamma_4 - 2\gamma_1, \gamma_4 - \gamma_2 - \gamma_1, \gamma_4 - \gamma_2 - \gamma_3\} = \{(0, 2, 3), (1, 1, 3), (0, 1, 2)\},$
- $\mathcal{A}(\xi^1, \gamma_2) = \{\gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_4 - 2\gamma_2, \gamma_4 - \gamma_3 - \gamma_2\} = \{(1, 1, 3), (2, 0, 3), (1, 0, 2)\},$
- $\mathcal{A}(\xi^1, \gamma_3) = \{\gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_3, \gamma_4 - \gamma_2 - \gamma_3, \gamma_4 - 2\gamma_3\} = \{(0, 1, 2), (1, 0, 2), (0, 0, 1)\}.$

Por lo tanto, la salida del \mathcal{L} -algoritmo es el conjunto de exponentes monomiales esencial:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \text{Red}(\xi^1 \cup \mathcal{A}(\xi^1, \gamma_1) \cup \mathcal{A}(\xi^1, \gamma_2) \cup \mathcal{A}(\xi^1, \gamma_3)), \\ &= \text{Red}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (0, 1, 2), (2, 0, 3), (1, 0, 2), (0, 0, 1)\}), \\ &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Como la cardinalidad de ξ^2 es 3, tenemos que el algoritmo se detiene.

2.2. \mathcal{L} -Algoritmo de Nash en dimensión 2. En el año 2013, Duarte, en su trabajo [5], empleó el algoritmo combinatorio y demostró que, en ciertos escenarios, el Método de Nash resulta efectivo para variedades algebraicas irreducibles de dimensión 2.

2.2.1. *El L -algoritmo de Nash.* La siguiente descripción detalla el paso a paso de la modificación de Nash aplicada a superficies tóricas esenciales.

- (P1) Sea $\xi = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$ con $r > 2$ un conjunto de exponentes monomiales de alguna superficie tórica X talque $(0,0) \notin \text{Conv}(\xi)$ es decir, X es una variedad tórica afín esencial.
- (P2) Sea $S := \left\{ \{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\} \mid \det(\gamma_i \gamma_j) := \gamma_{i1}\gamma_{j2} - \gamma_{i2}\gamma_{j1} \neq 0 \right\}$. Fijemos algún $\{i_0, j_0\} \in S$ y consideremos los conjuntos:

$$A_{i_0, j_0}(\xi) := \left\{ \gamma_k - \gamma_{i_0} \mid k \in \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{i_0, j_0\}, \det(\gamma_k \gamma_{j_0}) \neq 0 \right\}.$$

$$A_{j_0, i_0}(\xi) := \left\{ \gamma_k - \gamma_{j_0} \mid k \in \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{i_0, j_0\}, \det(\gamma_k \gamma_{i_0}) \neq 0 \right\}.$$

- (P3) Sea $\xi_{i_0, j_0} := A_{i_0, j_0}(\xi) \cup A_{j_0, i_0}(\xi) \cup \{\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}\}$. Si $(0,0) \notin \text{Conv}(\xi_{i_0, j_0})$, entonces este conjunto es un conjunto de exponentes monomiales para una carta afín de la modificación de Nash de X . (Recordemos que $N^1 X$ está cubierta por estas cartas afín esenciales).
- (P4) Si el conjunto minimal de exponentes monomiales asociado a ξ_{i_0, j_0} tiene dos elementos, esta carta afín es no singular, entonces nos detenemos, ya que se trata de una variedad suave. En el caso que tenga más de dos elementos, reemplazamos ξ por el conjunto minimal asociado a ξ_{i_0, j_0} y repetimos el proceso.

El elemento de S que fijamos en el segundo paso, lo obtenemos de la siguiente manera:

- (P2.1) Fijemos cualquier transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $L(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$; $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a, b) = 1$ (también permitimos los casos $a = 1, b = 0$ y $a = 0, b = 1$) tal que $L(\xi) \geq 0$. Llamamos a $L(\gamma)$ el L -valor de γ .
- (P2.2) Sean $\gamma_i, \gamma_j \in \xi$ dos elementos tales que:
- $\{i, j\} \in S$,
 - $L(\gamma_i) \leq L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi$,
 - $L(\gamma_j) \leq L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi$ con $\det(\gamma_i \gamma_k) \neq 0$ y
 - $(0,0) \notin \text{Conv}(\xi_{ij})$

Decimos que L elige γ_i y γ_j .

OBSERVACIÓN 4. *Notemos que el algoritmo 2.2.1 propuesto por Duarte considera un conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi_0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y fija una transformación lineal de la forma $L(x, y) = ax + by$ con $\text{mcd}(a, b) = 1$ de modo que $L(\xi_0) \geq 0$. Gracias al Teorema de Bézout, existen enteros α y β tales que $\alpha a + \beta b = 1$. Aplicando el isomorfismo lineal $T(x, y) = (\beta x - \alpha y, ax + by)$ al conjunto ξ_0 , obtenemos un nuevo conjunto de exponentes monomiales $\xi := T(\xi_0) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si el L -algoritmo de Nash fija la transformación lineal $L(x, y) = y$, entonces naturalmente se cumple que $L(\xi) \geq 0$, además se escoge la dupla $(\gamma_i, \gamma_j) \in \mathcal{S}(\xi)$ tal que:*

- $L(\gamma_i) \leq L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi$,
- $L(\gamma_j) \leq L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi$ con $\det(\gamma_i \gamma_k) \neq 0$ y
- $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi_{ij})$.

En situaciones en las cuales las elecciones bajo una transformación lineal presentan empates, es decir, $L(\gamma_i) = L(\gamma_j)$, se pueden identificar los siguientes escenarios:

- i. *Si existen al menos 3 elementos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tal que $0 < L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = L(\gamma_3) \leq L(\gamma_i)$ para todo $\gamma_i \in \xi \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, considerando el conjunto $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$ de todos los elementos de ξ cuyo L -valor es $L(\gamma_1)$, con $c_x(\rho_1) < c_x(\rho_2) < \dots < c_x(\rho_s)$, donde $c_x(\rho_i)$ denota la primera coordenada de γ_i . Finalmente, para no contradecir que $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi^1)$, L sólo puede escoger a las parejas $\{\rho_1, \rho_2\}$ o bien $\{\rho_{s-1}, \rho_s\}$.*
- ii. *Si existe $\gamma_1 \in \xi$ tal que $0 < L(\gamma_1) < L(\gamma')$ para todo $\gamma' \in \xi \setminus \{\gamma_1\}$. Además hay al menos dos elementos γ_2, γ_3 con $\det(\gamma_1 \gamma_2) \neq 0$ y $\det(\gamma_1 \gamma_3) \neq 0$ tales que $0 < L(\gamma_1) < L(\gamma_2) = L(\gamma_3) \leq L(\gamma)$ para todo $\gamma \in \xi$ tal que $\det(\gamma_1 \gamma) \neq 0$. Si $k := L(\gamma_2) = L(\gamma_3)$, y denotemos por $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$ todos los elementos de ξ cuyo L -valor es k , y $c_x(\rho_1) < c_x(\rho_2) < \dots < c_x(\rho_s)$. Entonces para conservar lo esencial del conjunto generado L puede escoger a las parejas $\{\gamma_1, \rho_1\}$ o bien $\{\gamma_1, \rho_s\}$.*

Observemos que el orden establecido por el \mathcal{L} -valor canónico, definido en 2.6, permite seleccionar, en el primer caso presentado, la pareja $(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{S}(\xi)$,

ya que $\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\rho_2) < \dots < \mathcal{L}(\rho_s)$. Mientras tanto, en el segundo caso descrito, se escoge la pareja (γ_1, ρ_1) , dado que $\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\rho_2) < \dots < \mathcal{L}(\rho_s)$. Es importante destacar que si se define el \mathcal{L} -valor en otro orden lexicográfico, se seleccionarán las otras elecciones de L .

Por lo tanto, la iteración del algoritmo de Nash, siguiendo las elecciones de la transformación lineal L , se corresponde con las mismas elecciones que se harían al seguir el orden lexicográfico inverso establecido por \mathcal{L} en el caso $n = 2$. En otras palabras, L puede considerarse como un caso particular de \mathcal{L} .

EJEMPLO 13. [Aplicación del \mathcal{L} -algoritmo a una variedad tórica afín]

Consideremos el conjunto de exponentes monomiales

$$\xi = \{\gamma_1 = (1, 0), \gamma_2 = (2, 1), \gamma_3 = (0, 2), \gamma_4 = (0, 3)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

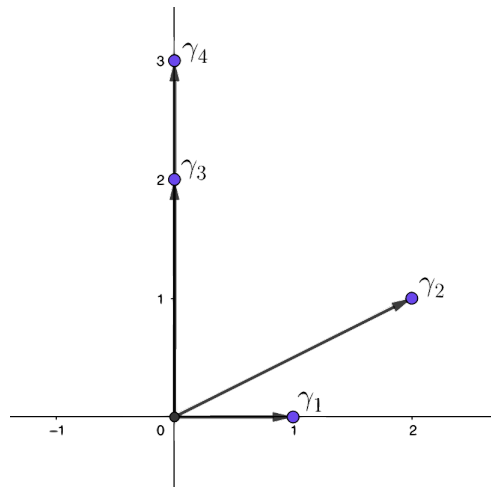


FIGURA 2. Elementos de ξ .

Este conjunto induce la aplicación monomial

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : (k^*)^2 &\longrightarrow k^4 \\ (u, v) &\longmapsto (u, u^2v, v^2, v^3). \end{aligned}$$

cuya superficie tórica asociada es:

$$X = \left\{ (x, y, z, w) \in k^4 \mid y^2 - x^4z = 0, y^3 - x^6w = 0, z^3 - w^2 = 0 \right\}$$

a partir de la figura 2, resulta evidente que $(0,0) \notin \text{Conv}(\xi)$, por lo tanto, X es una variedad tórica esencial. Por otro lado, el \mathcal{L} -orden en ξ , inducido por $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y) = x, \mathcal{L}_2(x, y) = y)$ es:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \mathcal{L}(\gamma_3) < \mathcal{L}(\gamma_4),$$

y como γ_1 y γ_2 son linealmente independientes, la \mathcal{L} -elección es $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Iterando el \mathcal{L} -algoritmo una vez, generamos el conjunto:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \text{Red}(\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - \gamma_1, \gamma_4 - \gamma_1, \gamma_3 - \gamma_2, \gamma_4 - \gamma_2\}), \\ &= \text{Red}(\{(-1, 2), (-1, 3), (-2, 1), (-2, 2), (1, 0), (2, 1)\}), \\ &= \{(1, 0), (-2, 1)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que ξ^1 consta de 2 elementos, el algoritmo se detiene. Además, es importante destacar que ξ^1 es un conjunto de exponentes monomiales para una carta afín no singular de la modificación de Nash de X .

EJEMPLO 14. [Relación entre la Modificación de Nash y el \mathcal{L} -Algoritmo]

Consideremos el siguiente conjunto de exponentes monomiales:

$$\xi = \{\gamma_1 = (1, 0), \gamma_2 = (1, 1), \gamma_3 = (q-1, q) \mid q > 1\},$$

este conjunto induce la aplicación monomial

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : (k^*)^2 &\longrightarrow k^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, u^{q-1}v^q, uv). \end{aligned}$$

cuya superficie tórica asociada es $X = \{(x, y, z) \in k^3 \mid z^q - xy = 0\}$. Notemos que $\text{Sing}(X) = \{(0, 0, 0)\}$, sea $p := (x_0, y_0, z_0) \in X \setminus \text{Sing}(X)$, entonces

$$T_p X = \{(x, y, z) \mid -y_0x - x_0y + qz_0^{q-1}z = 0\}$$

viendo el espacio tangente como un punto en $G(2, 3)$ nos queda:

$$T_p X = [qz_0^{q-1} : -x_0 : -y_0]$$

y como $p = (x_0, y_0, z_0)$ debe cumplir con la parametrización de X , p tiene la forma $(u, u^{q-1}v^q, uv)$, luego:

$$\begin{aligned} T_p X &= [qu^{q-1}v^{q-1} : -u : -u^{q-1}v^q], \\ &= [qu^{q-2}v^{q-1} : -1 : -u^{q-2}v^q]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por definición:

$$\mathcal{N}^1 X = \overline{\left\{ \left((u, u^{q-1}v^q, uv), [qu^{q-2}v^{q-1} : -1 : -u^{q-2}v^q] \right) \in X \times \mathbb{P}^2 \mid (u, u^{q-1}v^q, uv) \in X \setminus \text{Sing}(X) \right\}}.$$

como $\mathcal{N}^1 X \subset X \times \mathbb{P}^2$, podemos estudiar a $\mathcal{N}^1 X$ en sus cartas afín. En particular, en $V_1 := X \times U_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^1 X \cap V_1 &\cong \overline{\left\{ \left(u, u^{q-1}v^q, uv, \frac{qu^{q-2}v^{q-1}}{-1}, \frac{-u^{q-2}v^q}{-1} \right) \in k^5 \mid (u, u^{q-1}v^q, uv) \in X \setminus \text{Sing}(X) \right\}}, \\ &\cong \overline{\left\{ \left(u, u^{q-1}v^q, uv, u^{q-2}v^{q-1}, u^{q-2}v^q \right) \in k^5 \mid (u, u^{q-1}v^q, uv) \in X \setminus \text{Sing}(X) \right\}}, \\ &\cong \overline{\left\{ \left(u, uv, u^{q-2}v^{q-1}, u^{q-2}v^q \right) \in k^4 \mid (u, u^{q-1}v^q, uv) \in X \setminus \text{Sing}(X) \right\}}, \\ &\cong \overline{\left\{ \left(u, uv, u^{q-2}v^{q-1}, u^{q-2}v^q \right) \in k^4 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el \mathcal{L} -orden en $\xi = \{\gamma_1 = (1, 0), \gamma_2 = (1, 1), \gamma_3 = (q-1, q) \mid q > 1\}$ inducido por $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y) = x, \mathcal{L}_2(x, y) = y)$ es:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \mathcal{L}(\gamma_3)$$

como γ_1 y γ_2 son linealmente independientes, la \mathcal{L} -elección es $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo obtenemos el conjunto:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \text{Red}(\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - \gamma_2, \gamma_3 - \gamma_1\}), \\ &= \text{Red}(\{(1, 0), (1, 1), (q-2, q-1), (q-2, q)\}), \\ &= \{(1, 0), (1, 1), (q-2, q-1), (q-2, q)\} \end{aligned}$$

que induce la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi^1} : (k^*)^2 &\longrightarrow k^4 \\ (u, v) &\longmapsto (u, uv, u^{q-2}v^{q-1}, u^{q-2}v^q). \end{aligned}$$

entonces:

$$\mathcal{N}^1 X \cap V_1 \cong \overline{\Phi_{\xi^1}((k^*)^2)}.$$

El ejemplo 14 ilustra que es suficiente examinar las iteraciones del algoritmo combinatorial, ya que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un nuevo conjunto de exponentes monomiales para una de las cartas afines de $\mathcal{N}^1 X$.

Capítulo 3

Modificación de Nash en variedades tóricas de dimensión 3.

Como se expuso en el capítulo anterior, cuando se tiene un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ , es posible definir la \mathcal{L} -elección inducida por un orden lexicográfico inverso en \mathbb{Z}^n , la cual fija una n -tupla $\Delta \in S(\xi)$ para realizar una iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash.

Por lo tanto, la Proposición 2.5 nos indica que, al iniciar con un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna variedad tórica X de dimensión n , la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un nuevo conjunto de exponentes monomiales que también es esencial. Recordando las Proposiciones 2.2 y 2.3, podemos concluir que la iteración de la Modificación de Nash está descrita mediante un algoritmo combinatorio que se detiene cuando el conjunto de exponentes monomiales esencial resultante tiene asociado un conjunto minimal de exponentes monomiales ξ' con n elementos.

1. Modificación de Nash sobre Variedades Tóricas de dimensión 3.

En 2013, en [5] Duarte con el Teorema 3.1 da lugar a una solución parcial del problema de la resolución de las singularidades de una variedad tórica de dimensión 2, específicamente prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1. *(Duarte 2013) Sean $\xi \subset \mathbb{Z}^2$ un conjunto de exponentes monomiales de alguna superficie tórica esencial y $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, una transformación lineal con \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 rectas con pendientes racionales, entonces mediante la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos un conjunto de exponentes monomiales con dos elementos.*

La solución se considera parcial, ya que no está claro si las cartas afines obtenidas cubren completamente la variedad resultante de los estallidos. El objetivo de este capítulo consiste en generalizar el Teorema 3.1 para variedades tóricas en dimensión 3. Posteriormente, se presentan algunos ejemplos de la resolución de singularidades de una variedad tórica utilizando el \mathcal{L} -algoritmo.

TEOREMA 3.2. *(2023) Sea $\xi \subset \mathbb{Z}^3$ un conjunto de exponentes monomiales de alguna variedad tórica esencial dotado de un \mathcal{L} -orden canónico, entonces mediante la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos un conjunto de exponentes monomiales con tres elementos.*

Como el \mathcal{L} -orden es canónico, por el resto de este capítulo, podemos suponer que está dado por los hiperplanos canónicos, es decir, \mathcal{L} tiene la forma $(\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = y, \mathcal{L}_3(x, y, z) = z)$, ver Observación 3 y la Definición 2.6.

Antes de iniciar con la demostración del teorema, presentaremos algunos ejemplos que servirán para ilustrar la estrategia de demostración que emplearemos. Estos ejemplos permitirán comprender mejor el enfoque y los pasos que seguiremos.

Recordemos que en el ejemplo 12 ilustramos que para la variedad tórica $\mathcal{V}(w^3 - xyz) \subset \mathbb{C}^4$ cuyo conjunto de exponentes monomiales es

$$\xi = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (1, 1, 1), (2, 2, 3)\},$$

el \mathcal{L} -algoritmo de Nash se detiene después de dos iteraciones, en el siguiente ejemplo, demostraremos que para la variedad tórica

$$\mathcal{V}(w^{p+1} - xyz) \subset \mathbb{C}^4,$$

el \mathcal{L} -algoritmo de Nash se detiene después de p iteraciones.

EJEMPLO 15. *Consideremos la variedad tórica X_σ , donde*

$$\sigma = \text{cone}(\mathbf{e}_3, (p+1)\mathbf{e}_1 - p\mathbf{e}_3, (p+1)\mathbf{e}_2 - p\mathbf{e}_3)$$

para $p \geq 1$, que puede ser identificada con la variedad $\mathcal{V}(w^{p+1} - xyz) \subseteq \mathbb{C}^4$.

Notemos que el conjunto de exponentes monomiales asociado a X_σ es:

$$\xi^0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (p, p, p+1)\}$$

para la primera iteración, el \mathcal{L} -valor canónico induce el orden estricto

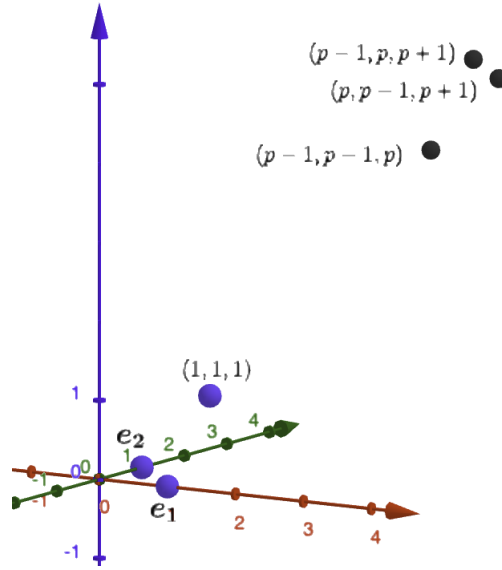
$$\mathcal{L}((1, 0, 0)) < \mathcal{L}((0, 1, 0)) < \mathcal{L}((1, 1, 1)) < \mathcal{L}((p, p, p+1))$$

como $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)) \in \mathcal{S}(\xi^0)$, la \mathcal{L} -elección es la terna

$$\Delta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Aplicando una iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos el conjunto:

$$\xi^1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (p-1, p, p+1), (p, p-1, p+1), (p-1, p-1, p)\}$$

FIGURA 1. Elementos de ξ^1 .

- Si $p = 1$, entonces el elemento $(p-1, p-1, p) = \mathbf{e}_3$ y como $\xi^1 \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, nos queda $\text{Red}(\xi^1) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ que define el cono liso $\sigma_1^\vee = \text{cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ cuyo dual es una carta afín suave para $\mathcal{N}X_\sigma$.
- Si $p > 1$, entonces hacemos una nueva iteración del algoritmo, para ξ^1 , \mathcal{L} induce el siguiente orden:

$$\mathcal{L}(1, 0, 0) < \mathcal{L}(0, 1, 0) < \mathcal{L}(1, 1, 1) < \mathcal{L}(p-1, p-1, p) < \mathcal{L}(p, p-1, p+1) < \mathcal{L}(p-1, p, p+1)$$

Nuevamente escoge la terna $\Delta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, aplicando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos:

$$\mathcal{A}(\xi^1, (1, 0, 0)) = \{(p-2, p-1, p), (p-1, p-1, p+1), (p-2, p, p+1)\}$$

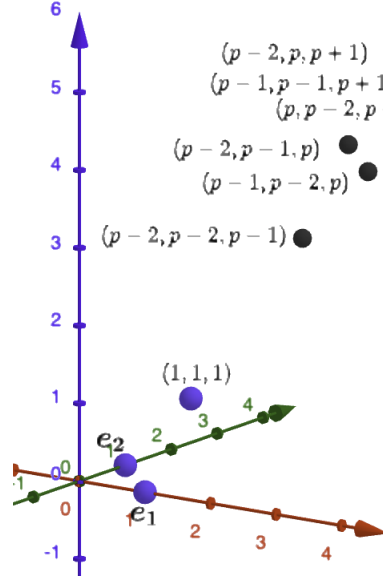
$$\mathcal{A}(\xi^1, (0, 1, 0)) = \{(p-1, p-2, p), (p, p-2, p+1), (p-1, p-1, p+1)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi^1, (1, 1, 1)) = \{(p-2, p-2, p-1), (p-1, p-2, p), (p-2, p-1, p)\}$$

formamos el conjunto

$$\xi^2 = \text{Red} \left\{ \Delta \cup \mathcal{A}(\xi^1, (1, 0, 0)) \cup \mathcal{A}(\xi^1, (0, 1, 0)) \cup \mathcal{A}(\xi^1, (1, 1, 1)) \right\}$$

$$= \text{Red} \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (p-2, p, p+1), (p-1, p-1, p+1), (p, p-2, p+1), (p-2, p-1, p), (p-1, p-2, p), (p-1, p-2, p-1) \}$$

FIGURA 2. Elementos de ξ^2 .

- Si $p = 2$, entonces el elemento $(p-2, p-2, p-1) = \mathbf{e}_3$ y como $\xi^2 \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, nos queda $\text{Red}(\xi^2) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ que define el cono liso $\sigma_1^\vee = \text{cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ cuyo dual es una carta afín suave para NX_σ .
- Si $p > 2$, volvemos a aplicar el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, con la \mathcal{L} -elección habitual $\Delta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Por lo tanto, un argumento de recurrencia, permite concluir que después de p iteraciones, obtenemos el conjunto

$$\xi^p = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\} \cup \bigcup_{i=1}^k \delta_{k,i}$$

donde $\delta_{k,i} := (i, k - (i + 1), k)$, con $0 \leq i \leq k - 1$ y $1 \leq k \leq p + 1$.

Notemos que el elemento $\delta_{1,0} = \mathbf{e}_3$ y como $\xi^p \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, el conjunto de exponentes monomiales minimal resultante es $\text{Red}(\xi^p) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ que define el cono liso $\sigma_1^\vee = \text{cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ cuyo dual es una carta afín suave para la modificación de Nash de X_σ .

EJEMPLO 16. *Consideremos la variedad tórica cuyo conjunto de exponentes monomiales es*

$$\xi = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 5)\}$$

y consideremos el \mathcal{L} -orden inducido por

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = y, \mathcal{L}_3(x, y, z) = z),$$

entonces la \mathcal{L} -elección para ξ corresponde a la terna $\Delta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 4)\}$.

Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos:

$$\mathcal{A}(\xi, (1, 1, 1)) = \{(1, 2, 4)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi, (1, 2, 3)) = \{(1, 1, 2)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi, (2, 2, 4)) = \{(0, 1, 1)\}$$

luego, el conjunto de exponentes monomiales obtenido en la primera iteración es:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \text{Red} \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 4), (1, 1, 2)(1, 2, 4), (0, 1, 1)\} \\ &= \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 4)\}. \end{aligned}$$

Para ξ^1 , la \mathcal{L} -elección es $\Delta^1 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$. Aplicando por segunda vez el \mathcal{L} -algoritmo de Nash tenemos que:

$$\mathcal{A}(\xi^1, (0, 1, 1)) = \{(1, 1, 3)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi^1, (1, 1, 1)) = \{(0, 1, 3)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi^1, (1, 1, 2)) = \{(0, 1, 2)\}$$

entonces, el conjunto de exponentes monomiales obtenido en la segunda iteración es:

$$\xi^2 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (0, 1, 3), (0, 1, 2)\}.$$

Para ξ^2 , la \mathcal{L} -elección es $\Delta^2 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$. Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash tenemos que:

$$\mathcal{A}(\xi^2, (0, 1, 1)) = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi^2, (1, 1, 1)) = \{(1, 0, 2), (0, 0, 2), (1, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{A}(\xi^2, (0, 1, 2)) = \{(0, 0, 2), (-1, 0, 2), (0, 0, 1)\},$$

entonces, el conjunto de exponentes monomiales obtenido en la tercera iteración es:

$$\begin{aligned}\xi^3 &= \mathcal{R}ed \left\{ \Delta^2 \cup \mathcal{A}(\xi^2, (0, 1, 1)) \cup \mathcal{A}(\xi^2, (1, 1, 1)) \cup \mathcal{A}(\xi^2, (0, 1, 2)) \right\} \\ &= \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 2)\}.\end{aligned}$$

Finalmente, para ξ^3 , la \mathcal{L} -elección es $\Delta^3 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\xi^3, (1, 0, 0)) &= \{(-2, 0, 2)\} \\ \mathcal{A}(\xi^3, (0, 0, 1)) &= \{(-1, 0, 1)\} \\ \mathcal{A}(\xi^3, (0, 1, 1)) &= \emptyset,\end{aligned}$$

y obtenemos el conjunto:

$$\begin{aligned}\xi^4 &= \mathcal{R}ed \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (-2, 0, 2), (-1, 0, 1)\} \\ &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}\end{aligned}$$

cuya cardinalidad es 3, luego el \mathcal{L} -algoritmo se detiene.

Notemos que en los dos ejemplos presentados se parte de conjuntos de exponentes monomiales muy diferentes entre sí. En el ejemplo 15, comenzamos con un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección contiene los elementos canónicos \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Mediante iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, finalmente se genera el elemento \mathbf{e}_3 , en esa iteración además se detiene el \mathcal{L} -algoritmo.

Por otro lado, en el ejemplo 16, iniciamos con un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección es general. Sin embargo, al paso de tres iteraciones, se obtiene un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección incluye un elemento cuyo \mathcal{L}_3 -valor es 0. Además, esa \mathcal{L} -elección forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 . Finalmente, en la siguiente iteración, el \mathcal{L} -algoritmo se detiene.

Como hemos analizado, a partir de un conjunto de exponentes monomiales, las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo pueden llevarnos a diferentes escenarios. Por lo tanto, la estrategia para demostrar el Teorema 3.2 considerará todas estas posibles variaciones.

Comenzamos con el Lema 3.1, probando que a partir de un conjunto de exponentes monomiales general ξ , la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.

En el Lema 3.2, a partir de un conjunto de exponentes monomiales ξ que contiene un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0, demostraremos que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera uno de los siguientes casos:

- i. Un conjunto de exponentes monomiales que contiene un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor 0.
- ii. Un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección es una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 .
- iii. Un conjunto de exponentes monomiales con dos elementos linealmente independientes, ambos con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.

Luego, en el Lema 3.3 se demostrará que, si un conjunto de exponentes monomiales ξ contiene un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor 0, la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de la forma ii. o iii. del lema anterior.

En el Lema 3.4, se estudia el caso en donde el conjunto de exponentes monomiales esencial ξ tiene como \mathcal{L} -elección una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 . Se verificará que se obtiene un conjunto de exponentes monomiales ξ' cuya cardinalidad es 3 (lo que resuelve el problema) o bien contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.

A continuación, si el conjunto de exponentes monomiales tiene dos elementos linealmente independientes, ambos con \mathcal{L}_3 -valor 0, entonces, en el Lema 3.5, se probará que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1. Posteriormente, en el Lema 3.6, demostraremos que dado el conjunto ξ con dos elementos linealmente independientes, ambos con \mathcal{L} -valor igual a cero, y un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1, la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' tal que $\mathbb{Z}\xi'_0 = \mathbb{Z}^2$, donde ξ'_0 es el conjunto de elementos de ξ' con \mathcal{L}_3 -valor cero. Utilizando algunos resultados obtenidos en [5], podremos suponer que

la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección es la base canónica $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, y $(0, 0, 1)$.

A partir de un conjunto de exponentes monomiales ξ cuya \mathcal{L} -elección es la base canónica, en el Lema 3.7, demostraremos que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' con un único elemento que tiene un \mathcal{L}_3 -valor distinto de 0.

Para concluir, es posible observar que a partir de este momento, las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash solo realizan operaciones en $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ manteniendo fijo el elemento con \mathcal{L}_3 -valor distinto de 0. La demostración del Teorema 3.2 culmina aplicando el Teorema 3.1 para obtener 2 elementos en $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$, junto al tercer elemento fijo con \mathcal{L}_3 -valor distinto de cero, se obtienen los 3 elementos generadores.

Para comenzar la demostración del Teorema 3.2, es importante tener en cuenta la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 5. *Dado el conjunto de exponentes monomiales*

$$\xi = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^3,$$

con $r > 3$, tal que $\mathcal{L}_3(\gamma_i) > 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$. La Observación 2 permite asumir que \mathcal{L} induce el siguiente orden:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_s) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_l) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r). \quad (3.1)$$

Supongamos que la \mathcal{L} -elección es $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_s, \gamma_l\} \in \mathcal{S}(\xi)$. Luego por Definición 2.7 tenemos que:

$$0 < \mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_s) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_l) \quad (3.2)$$

entonces en una iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, cada $\gamma_i \in \xi \setminus \Delta$ genera al menos un elemento en ξ^1 . En efecto, como Δ es una base para \mathbb{Q}^3 , entonces cada γ_i con $i \notin \{1, s, l\}$, tiene la forma

$$\gamma_i = \lambda_i \gamma_1 + \kappa_i \gamma_s + \mu_i \gamma_l, \text{ donde } \lambda_i, \kappa_i, \mu_i \in \mathbb{Q}.$$

Supongamos que $\gamma_i - \gamma_l \notin \xi^1$, entonces $\det(\gamma_i \ \gamma_s \ \gamma_l) = 0$, lo que significa que γ_i se puede escribir como combinación lineal de γ_s y γ_l , luego $\lambda_i = 0$. Si además $\gamma_i - \gamma_s \notin \xi^1$, significa que $\gamma_i = \mu_i \gamma_l$, por la Relación 3.1 se tiene que $\mu_i > 1$, entonces $\gamma_i - \gamma_l \in \xi^1$.

Principio: Durante este capítulo va ser reiterado considerar un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ bajo ciertas hipótesis \mathcal{H} , y probar que existe un número finito de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, que depende de ξ , digamos $k(\xi)$, tal que el conjunto monomial generado $\xi^{k(\xi)}$ satisface cierta propiedad \mathcal{P} , o bien que $\xi^{k(\xi)}$ es un conjunto de exponentes monomiales con 3 elementos, es decir, el \mathcal{L} -algoritmo finaliza, ver Definición 2.8. Como se observa el entero $k(\xi)$ depende fuertemente de ξ .

PRINCIPIO DE ITERACIÓN El principio de iteración consiste, en cada iteración que preserva la hipótesis \mathcal{H} , siempre se considera el hipotéticamente posible peor caso (podría ser que el caso no exista) entre todos los conjuntos ξ que satisfacen la hipótesis \mathcal{H} . La idea es que siempre podemos iterar el \mathcal{L} -algoritmo tantas veces como sea necesario, sin que el \mathcal{L} -algoritmo finalice, hasta probar que el \mathcal{L} -algoritmo nos entrega un conjunto monomial que satisface la propiedad \mathcal{P} .

Es importante establecer que en todas las demostraciones de los siguientes lemas estarán bajo este principio de iteración.

LEMA 3.1. Sea $\xi = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^3$ con $r > 3$ un conjunto de exponentes monomiales de alguna variedad tórica esencial, tal que $\mathcal{L}_3(\gamma_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq r$, entonces la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales que contiene al menos un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.

DEMOSTRACIÓN. Según la Observación 2, tenemos que \mathcal{L} induce un orden total en \mathbb{Z}^3 . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos escribir

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_s) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_l) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r).$$

Además, por la Observación 3, podemos asumir que $\xi \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Luego, según la definición de \mathcal{L} -valor (ver Definición 2.7), se tiene:

$$0 < \mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_2) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_3) \leq \dots \leq \mathcal{L}_3(\gamma_r) \quad (3.3)$$

demostraremos el lema utilizando inducción sobre el \mathcal{L}_3 -valor de γ_r .

Sea $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_s, \gamma_l\} \in \mathcal{S}(\xi)$ la \mathcal{L} -elección del conjunto ξ .

Si $\mathcal{L}_3(\gamma_r) = 1$, el orden inducido por \mathcal{L} en la Relación 3.3, indica que $\mathcal{L}_3(\gamma_i) = 1$ para $1 \leq i \leq r$. La Observación 5 asegura la existencia de al menos un γ_j con $j \in \{1, s, l\}$ tal que $\gamma_r - \gamma_j \in \xi^1$, además $\mathcal{L}_3(\gamma_r - \gamma_j) = \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_r)}_{=1} - \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_j)}_{=1} = 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para todo conjunto de exponentes monomiales esencial tal que $\mathcal{L}_3(\gamma_r) < k$. Lo verificaremos para un conjunto de exponentes monomiales ξ , tal que $\mathcal{L}_3(\gamma_r) = k$.

Según la Observación 5, existe γ_j con $j \in \{1, s, l\}$, tal que en una iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera el elemento $\gamma_r - \gamma_j \in \xi^1$. Además por la Relación 3.3 se tiene que $0 < \mathcal{L}_3(\gamma_j) \leq k$.

- Si $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = k$, el elemento $\gamma_r - \gamma_j \in \xi^1$ tiene \mathcal{L}_3 -valor 0. Lo que termina la demostración.
- Si $\mathcal{L}_3(\gamma_j) < k$, el elemento $\gamma_r - \gamma_j$ tiene la propiedad de tener el mayor \mathcal{L}_3 -valor en ξ^1 , además

$$\mathcal{L}_3(\gamma_r - \gamma_j) = \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_r)}_{=k} - \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_j)}_{>0} < k.$$

La hipótesis de inducción permite culminar la demostración. □

OBSERVACIÓN 6. *Dado el conjunto de exponentes monomiales*

$$\xi = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^3,$$

con $r > 3$, por el Lema 3.1 podemos suponer que $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 0$. Al igual que en la Observación 5 tenemos el orden:

$$\mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_s) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_l) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r), \quad (3.4)$$

la \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_s, \gamma_l\} \in \mathcal{S}(\xi)$ y todo elemento γ_i con $i \notin \{1, s, l\}$ tienen la forma:

$$\gamma_i = \lambda_i \gamma_1 + \kappa_i \gamma_s + \mu_i \gamma_l, \text{ donde } \lambda_i, \kappa_i, \mu_i \in \mathbb{Q}.$$

Por el orden en la Relación 3.4 y la definición de \mathcal{L} -elección, tenemos las siguientes afirmaciones:

- Cada γ_i con $1 < i < s$ es linealmente dependiente a γ_1 , además γ_i se puede expresar como $\gamma_i = \lambda_i \gamma_1$ donde $\lambda_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})_{>1}$.
- Cada γ_i con $s < i < l$ es linealmente dependiente a γ_1 o γ_s o ambos, además γ_i se puede expresar como $\gamma_i = \lambda_i \gamma_1 + \kappa_i \gamma_s$ donde $\lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{Q}$. En particular si $\mathcal{L}_3(\gamma_s) > 0$, se tiene que $\kappa_i \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$.
- Cada γ_i con $i > l$, se puede expresar como $\gamma_i = \lambda_i \gamma_1 + \kappa_i \gamma_s + \mu_i \gamma_l$ donde $\lambda_i, \kappa_i, \mu_i \in \mathbb{Q}$. Como $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 0$, si $\mathcal{L}_3(\gamma_s) > 0$ se tiene que $\kappa_i + \mu_i \geq 1$.

Por Lema 3.1, podemos suponer que todo conjunto de exponentes monomiales ξ contiene al menos un elemento con \mathcal{L}_3 -valor 0, sin pérdida de generalidad digamos que ξ tiene la forma:

$$\xi = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \quad (3.5)$$

donde:

- ρ_i tiene \mathcal{L}_3 -valor igual a cero, para $1 \leq i \leq s$.
- γ_i tiene \mathcal{L}_3 -valor mayor a cero, para $1 \leq i \leq r$.

Y que el orden inducido por \mathcal{L} en ξ es:

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\rho_2) < \dots < \mathcal{L}(\rho_s) < \mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r).$$

LEMA 3.2. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales de alguna variedad tórica esencial de la forma descrita en 3.5, entonces la iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- i) *El conjunto ξ' contiene dos elementos linealmente independiente con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.*
- ii) *El conjunto ξ' contiene un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.*
- iii) *La \mathcal{L} -elección del conjunto ξ' forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 .*

DEMOSTRACIÓN. Como ξ tiene la forma descrita en 3.5, si existen ρ_1 y ρ_j son linealmente independientes para algún $1 < j \leq s$, sin realizar iteraciones el conjunto monomial ξ satisface directamente el lema. Entonces podemos suponer que para $1 < i \leq s$, se tiene que cada ρ_i es linealmente dependiente a ρ_1 , luego existe $\lambda_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})_{>1}$ tal que $\rho_i = \lambda_i \rho_1$.

Al igual que en la Observación 6, la \mathcal{L} -elección tiene la forma $\Delta = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, correspondiente a la menor terna linealmente independiente en el orden inducido por \mathcal{L} . Notemos que los vectores ρ_1 , γ_1 y γ_l son una base del \mathbb{Q} espacio vectorial \mathbb{Q}^3 , y se tiene que todo elemento $\gamma_i \in \xi$ se puede escribir como:

$$\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l$$

con λ_i, κ_i y $\mu_i \in \mathbb{Q}$.

REDUCCIÓN. Si existe algún $\rho_j = \lambda_j \rho_1 \in \xi$, con $\lambda_j \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})_{>1}$, por el Principio de Iteración 1, podemos aplicar $\lfloor \lambda_j \rfloor$ veces el \mathcal{L} -algoritmo de Nash hasta obtener el elemento

$$\rho'_1 = \rho_j - \lfloor \lambda_j \rfloor \rho_1 \text{ tal que } \mathcal{L}(\rho'_1) < \mathcal{L}(\rho_1),$$

donde $\lfloor \lambda_j \rfloor$ es la parte entera de λ_j . En el peor de los casos obtendremos un conjunto monomial de la siguiente forma:

$$\xi' = \{\rho'_1, \dots, \rho'_s, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r\}.$$

con ρ'_1 no primitivo y \mathcal{L} -elección la terna $\Delta = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$. Sin embargo, como $\mathbb{Z}\rho_1$ es un subgrupo de $\mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2$ de índice finito, $I := [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2] < \infty$, se satisface que:

$$[\mathbb{Z}\rho'_1 : \mathbb{R}\rho'_1 \cap \mathbb{Z}^2] < [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2].$$

Desde ahora supondremos que ξ tiene la forma:

$$\xi = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_r\}. \quad (3.6)$$

donde

- El orden inducido por \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_l) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r).$$

- $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq r$.
- La \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$.

Bajo el principio de recurrencia, probaremos que si ρ_1 no es primitivo, existe una iteración del \mathcal{L} -algoritmo en la cual podemos aplicar la reducción

y bajar el valor del índice I . La finitud del índice I garantiza que eventualmente llegaremos a una iteración del \mathcal{L} -algoritmo en el cual índice se establezca o sea igual 1, lo cual es equivalente a asumir que ρ_1 es primitivo.

OBSERVACIÓN 7. *Notemos que las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash sobre el conjunto ξ , puede generar los siguientes posibles conjuntos ξ' :*

- *El conjunto ξ' produce un cambio de la \mathcal{L} -elección, Δ' , tal que contiene dos vectores linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero, lo que muestra que ξ satisface el lema.*
- *El conjunto ξ' produce un cambio de la \mathcal{L} -elección, Δ' , tal que contiene un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0, lo que muestra que ξ satisface el lema.*
- *El conjunto ξ' produce un cambio de la \mathcal{L} -elección, Δ' , tal que $\Delta' \subset \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, lo que define un retículo más fino al inicial, y por un argumento de recurrencia, la \mathcal{L} -elección formaría una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 , lo que muestra que ξ satisface el lema.*
- *El conjunto ξ' satisface el peor de los casos, que es producir un cambio de la \mathcal{L} -elección, Δ' , donde $\Delta' \subsetneq \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, no contiene un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0 y no contiene dos vectores linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero. No obstante, el conjunto de exponentes monomiales ξ' seguiría teniendo las mismas características de (3.6), es decir, de la forma:*

$$\xi' = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{l'}, \dots, \gamma'_r\}.$$

con ρ'_1 no primitivo y $\mathcal{L}_3(\gamma'_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Recordemos que por Principio de Iteración 1, siempre supondremos que las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash generan un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface el peor de los casos.

Sean $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$ y $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_{l'}\}$ la nueva elección después de una iteración del \mathcal{L} -algoritmo. Luego tenemos que

$$\mathcal{L}_3(\rho'_1) = 0, \quad 0 < \mathcal{L}_3(\gamma'_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$$

Notemos que los elementos de la terna Δ' se pueden expresar en términos de Δ como:

$$\begin{aligned}\rho'_1 &= q\rho_1, \text{ donde } q \text{ es un racional positivo menor o igual a } 1. \\ \gamma'_1 &= a_1\rho_1 + b_1\gamma_1 + c_1\gamma_l. \\ \gamma'_{l'} &= a_2\rho_1 + b_2\gamma_1 + c_2\gamma_l.\end{aligned}$$

con $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Al aplicar $\mathcal{L}_3(\)$ a los elementos γ'_1 y $\gamma'_{l'}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma'_1)}_{\in \mathbb{Z}} &= a_1 \underbrace{\mathcal{L}_3(\rho_1)}_{=0} + b_1 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + c_1 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_l)}_{=k \in \mathbb{Z}} \\ \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma'_{l'})}_{\in \mathbb{Z}} &= a_2 \underbrace{\mathcal{L}_3(\rho_1)}_{=0} + b_2 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + c_2 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_l)}_{=k \in \mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma'_1)}_{\in \mathbb{Z}} &= b_1 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + c_1 k \\ \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma'_{l'})}_{\in \mathbb{Z}} &= b_2 \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + c_2 k\end{aligned}$$

como $\gamma'_1, \gamma'_{l'}$, son linealmente independientes, se cumple que $b_1 c_2 - b_2 c_1 = \pm 1$.

Si $c_1 \neq 0$, entonces necesariamente γ_1 y γ'_1 son linealmente independientes. Si además $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_l)$, tendríamos que $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) < k$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) < k$. Lo que disminuye el valor de k .

Muchos de nuestros argumentos pasan por tratar de disminuir el valor de k , siendo el peor caso cuando no podemos asegurar esto. Recordemos que por el Principio de Iteración 1, siempre consideramos el peor caso.

Si $c_1 = 0$, entonces $b_1 c_2 = \pm 1$ y como $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = a_1 \underbrace{\mathcal{L}_3(\rho_1)}_{=0} + b_1 \mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$, se tiene que $b_1 = 1$ y $c_2 = \pm 1$.

Recordemos que dado $\gamma_i \in \xi$ se puede escribir como:

$$\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l$$

con λ_i, κ_i y $\mu_i \in \mathbb{Q}$. Si $c_1 = 0$, al realizar el cambio a la base Δ' obtenemos

$$\gamma_i = \lambda'_i \rho'_1 + \kappa'_i \gamma'_1 + \mu'_i \gamma'_l$$

donde $\mu'_i = \pm \mu_i$.

Por lo anterior, al reescribir ξ' en términos de la base Δ' , por abuso de notación seguiremos notando los elementos de Δ' por $\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$.

Ahora utilizaremos el Principio de Iteración 1 para probar los siguientes resultados intermedios.

HECHO 1. *La iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface algunas de las siguientes propiedades:*

- i. *El conjunto exponentes monomiales ξ' verifica el lema.*
- ii. *El conjunto exponentes monomiales tiene la forma $\xi' = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r\}$ y el índice satisface*

$$[\mathbb{Z}\rho'_1 : \mathbb{R}\rho'_1 \cap \mathbb{Z}^2] < I := [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2].$$

- iii. *El conjunto exponentes monomiales tiene la forma $\xi' = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r\}$ y la \mathcal{L} -elección, $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$, en ξ' satisface que*

$$\mathcal{L}_3(\rho'_1) = 0, \text{ y } \mathcal{L}_3(\gamma'_1) < \mathcal{L}_3(\gamma'_l) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_l).$$

Observe que i. prueba el lema y ii. disminuye estrictamente el índice I . Entonces el problema se reducirá a estudiar solo el caso de conjuntos de exponentes monomiales que satisfacen iii.

DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Dado un conjunto de exponentes monomiales ξ de la forma descrita en 3.6, la \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$. genera un retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$. Observemos que al aplicar iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, si no hay cambio en la \mathcal{L} -elección, los elementos en el retículo generan exclusivamente elementos en el retículo y los elementos fuera del retículo solo generan elementos fuera de este retículo.

Dado que $\mathbb{Z}\xi = \mathbb{Z}^3$, se garantiza la existencia de al menos un elemento que se encuentra fuera del retículo, en caso contrario Δ formaría una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 y terminaría la demostración de lema. Denotemos por σ

al elemento con menor \mathcal{L}_3 -valor entre todos los elemento fuera del retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$ (podría no ser único).

Por la Observación 6 sabemos que σ tiene la siguiente forma

$$\sigma = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l \text{ con } \lambda_i, \kappa_i \text{ y } \mu_i \in \mathbb{Q}.$$

Luego tenemos que $(\lambda_i, \kappa_i, \mu_i) \notin \mathbb{Z}^3$.

Supongamos que el conjunto ξ satisface que $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$, probaremos el hecho por principio de recurrencia sobre k .

Si $k = 1$, entonces $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_l) = 1$, luego

$$\mathcal{L}_3(\sigma) = \lambda_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\rho_1)}_{=0} + \kappa_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{=1} + \mu_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_l)}_{=1} = \kappa_i + \mu_i > 0$$

Entonces $c := \kappa_i + \mu_i$ es un número entero mayor que 0.

Si $c = 1$, entonces $\mathcal{L}_3(\sigma) = \kappa_i + \mu_i = 1$, cuando $\mu_i = 0$, implica que $\kappa_i = 1$ (de hecho, $\mu_i = 0$ si y solo si $\kappa_i = 1$) y que $\lambda_i \notin \mathbb{Z}$. Luego σ tendría la forma $\lambda_i \rho_1 + \gamma_1$, por las Observaciones 5 y 6 en una iteración podemos generar el elemento

$$\sigma - \gamma_1 = \lambda_i \rho_1$$

cuyo \mathcal{L}_3 -valor es igual a 0. Ahora utilizando la Reducción 1, en el peor de los casos obtendremos un conjunto monomial de la siguiente forma:

$$\xi' = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r\}.$$

con ρ'_1 no primitivo y \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$, tal que reduce el valor del índice

$$[\mathbb{Z}\rho'_1 : \mathbb{R}\rho'_1 \cap \mathbb{Z}^2] < I := [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2].$$

Lo que verifica el hecho. El procedimiento es análogo para $\kappa_i = 0$.

Si $\kappa_i \neq 0$ y $\mu_i \neq 0$ con $\kappa_i + \mu_i = 1$. Tenemos que una iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales, ξ' , que posee los elementos $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \gamma_l$, tales que $\mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_1) = \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) = 0$. Note que uno de ellos es

linealmente independientes ρ_1 . Luego se verifica el hecho para $k = c = 1$.

Entonces podemos plantear la siguiente hipótesis de inducción: para $k = 1$ existe un $c_0 > 1$ tal que para todo $c < c_0$ se tiene que el conjunto de exponentes monomiales, ξ , con $\mathcal{L}_3(\sigma) = c$ satisface el hecho. Lo verificaremos para $c = c_0$.

En virtud de las Observaciones 5 y 6, al iterar el \mathcal{L} -algoritmo una vez, se genera el conjunto de exponentes monomiales ξ' tal que en el peor de los casos, su \mathcal{L} -elección $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_{l'}\}$, satisface que $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = \mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) = k$, (ver Observación 7). Recordemos que σ tiene la forma $\lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l$ donde $(\lambda_i, \kappa_i, \mu_i) \notin \mathbb{Z}^3$. Luego el conjunto ξ' contiene alguno de siguientes elementos, que no pertenece al retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$:

$$\sigma - \gamma_1 \text{ y/o } \sigma - \gamma_l$$

Si se genera el elemento $\sigma - \gamma_l$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) &= \mathcal{L}_3(\sigma) - \mathcal{L}_3(\gamma_l) \\ &= c_0 \mathcal{L}_3(\gamma_l) - \mathcal{L}_3(\gamma_l) \\ &= (c_0 - 1) \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_l)}_{k=1} \\ &= (c_0 - 1) \end{aligned}$$

Análogamente para $\gamma_i - \gamma_1$. Luego por hipótesis de recurrencia sobre $c_0 < c$, tenemos que ξ' satisface el hecho para $k = 1$.

Supongamos que todo conjunto de exponentes monomiales esencial con las hipótesis del Hecho 1 y $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) < k$ satisface el hecho, lo verificaremos para $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = k$. Notemos que existe un entero $d \geq 0$ tal que

$$\mathcal{L}_3(\sigma) \geq (d + 1) \mathcal{L}_3(\gamma_l) = (d + 1)k \quad (3.7)$$

En efecto, a lo menos $d = 0$, si no contradice el hecho que $\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$ es la \mathcal{L} -elección. Sea $d \geq 0$ el entero más grande tal que se satisface 3.7.

Ahora realizaremos una recurrencia sobre d para probar que después de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo (bajo el Principio de Iteración 1) obtenemos un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface el hecho.

Si $d = 0$, entonces tenemos dos posibilidades:

1. $\mathcal{L}_3(\sigma) = k$.
2. $k < \mathcal{L}_3(\sigma) < 2k$.

En el **Caso 1**. tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3(\sigma) &= \kappa_i \mathcal{L}_3(\gamma_1) + \mu_i \mathcal{L}_3(\gamma_l) \\ k &= \kappa_i k + \mu_i k \\ 1 &= \kappa_i + \mu_i.\end{aligned}$$

Al igual que antes, si $\mathcal{L}_3(\sigma) = \kappa_i + \mu_i = 1$, se tiene que $\mu_i = 0$ si y solo si $\kappa_i = 1$. Cuando $\mu_i = 0$, al aplicar una iteración generamos el elemento $\gamma_i - \gamma_1 = \lambda_i \rho_1$ que permite aplicar la Reducción 1, y así obtendremos un conjunto monomial que disminuye el valor del índice I . Análogo para $\kappa_i = 0$.

Ahora podemos suponer $\kappa_i, \mu_i \notin \{0, 1\}$. Entonces al iterar una vez el \mathcal{L} -algoritmo, se obtienen los elementos

$$\sigma - \gamma_1 \text{ y } \sigma - \gamma_l$$

Basta observar que ρ_1 y $\sigma - \gamma_1$ son linealmente independientes y

$$\mathcal{L}_3(\rho_1) = \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_1) = 0$$

lo que verifica el lema y por lo mismo el hecho.

En el **Caso 2**. tenemos que:

$$\begin{aligned}k < \mathcal{L}_3(\sigma) < 2k &\Leftrightarrow k < \kappa_i \mathcal{L}_3(\gamma_1) + \mu_i \mathcal{L}_3(\gamma_l) < 2k \\ &\Leftrightarrow k < \kappa_i k + \mu_i k < 2k \\ &= 1 < \kappa_i + \mu_i < 2\end{aligned}$$

Si $\kappa_i \neq 0$ y $\mu_i \neq 0$. Tenemos que una iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales, ξ' , que contiene los siguientes elementos

$$\sigma - \gamma_1 \text{ y } \sigma - \gamma_l$$

Tales que

$$\mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_1) = \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) < 2k - k = k$$

Además, notemos que la forma de los elementos $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \gamma_l$ es:

$$\sigma - \gamma_1 = \lambda_i \rho_1 + (\kappa_i - 1)\gamma_1 + \mu_i \gamma_l \quad \text{y} \quad \sigma - \gamma_l = \lambda_i \rho_1 + (\kappa_i - 1)\gamma_1 + \mu_i \gamma_l$$

con $\kappa_i \neq 0$ y $\mu_i \neq 0$. Por lo tanto, ρ_1 , $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \gamma_l$ son elementos linealmente independientes y forman la nueva \mathcal{L} -elección. Por hipótesis de recurrencia sobre k , verificamos que el hecho se satisface para el conjunto de exponentes monomiales ξ' .

Si $\kappa_i = 0$, entonces $1 < \mu_i < 2$. En una iteración del \mathcal{L} -algoritmo se genera un conjunto de exponentes monomiales, ξ' , que contiene el elemento $\sigma - \gamma_l = \lambda_i \rho_1 + (\mu_i - 1)\gamma_l$, notemos que $\sigma - \gamma_l$ es linealmente independiente a ρ_1 , γ_l y tiene $\mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) < 2k - k = k$. Por lo tanto, la nueva \mathcal{L} -elección contiene a $\sigma - \gamma_l$. En el caso que σ sea el único elemento con menor \mathcal{L}_3 -valor, el conjunto de exponentes monomiales ξ' satisface iii. del hecho. En caso contrario, en la nueva \mathcal{L} -elección se tendría dos elementos con igual \mathcal{L}_3 -valor estrictamente menor que k , y por la hipótesis de recurrencia se verificaría ii. del hecho. Por lo tanto queda demostrado el el hecho para $d = 0$.

Supongamos que existe un $d_0 \geq 1$ tal que el hecho se verifica para todo conjunto de exponentes monomiales, ξ con $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = k$ y tal que el entero, d , más grande que satisface

$$(d + 1)k \leq \mathcal{L}_3(\sigma)$$

es estrictamente menor que d_0 . Por verificarlo para $d = d_0$. Una iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' , al suponer el peor de los casos, su \mathcal{L} -elección $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$, se tiene que $\mathcal{L}_3(\rho'_1) = 0$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = \mathcal{L}_3(\gamma'_l) = k$, (ver Observación 7). El conjunto ξ' contiene alguno de los siguientes vectores (dependiendo si κ_i o μ_i son cero o no):

$$\sigma - \gamma_1 \text{ o } \sigma - \gamma_l$$

En ambos casos, $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \gamma_l$ no pertenecen al retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$ y

$$((d_0 - 1) + 1)k \leq \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_1) \text{ o } ((d_0 - 1) + 1)k \leq \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l)$$

Luego por hipótesis de recurrencia, se obtiene que lo anterior también es cierto para $d = d_0$. Lo que prueba el hecho. \square

Recordemos que el Hecho 1 redujo el problema a estudiar solo el caso de conjuntos de exponentes monomiales que satisfacen iii. Es decir: un conjunto de exponentes monomiales de la forma

$$\xi = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$$

donde la \mathcal{L} -elección, $\Delta := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, satisface:

$$\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0, \text{ y } \mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_l)$$

HECHO 2. Sea $\xi := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_r\}$ un conjunto de exponentes monomiales, tal que la \mathcal{L} -elección, $\Delta := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, satisface que $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_l)$. Entonces después de una secuencia de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se genera un conjunto de exponentes monomiales $\xi' = \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{r'}\}$ con ρ'_1 primitivo o ξ' verifica el lema.

DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Recordemos que el grupo $\mathbb{Z}\rho_1$ es un subgrupo de $\mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2$ de índice finito, $I = [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2]$. Además $I = 1$ si y solo si el vector ρ_1 es primitivo. Sea I_0 el entero más pequeño tal que:

$$[\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2] < I_0,$$

probaremos que después de una secuencia de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface el hecho.

Supongamos que:

$$[\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2] = I_0,$$

Si $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = 1$, implica que $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 0$. Lo verifica el lema y por lo mismo el hecho. Podemos suponer que el hecho es verdad para todo $\mathcal{L}_3(\gamma_l) < k$. Por verificar para $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$.

Recordemos que $\sigma \in \xi$ es el vector con menor \mathcal{L}_3 -valor entre todos los $\gamma_i \in \xi$, pero $\sigma \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_s\}$. Sabemos que σ tiene la siguiente forma:

$$\sigma = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l \text{ con } \lambda_i, \kappa_i \text{ y } \mu_i \in \mathbb{Q}.$$

y que $(\lambda_i, \kappa_i, \mu_i) \notin \mathbb{Z}^3$.

Primero supongamos que $\mu_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})$. Entonces para todo entero $c \geq 0$ la terna de vectores ρ_1, γ_1 y $\sigma - c\gamma_l$ siempre son linealmente independientes.

Notemos que existe a lo menos un $c \geq 0$ tal que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_l) \leq \mathcal{L}_3(\sigma) - c\mathcal{L}_3(\gamma_l) \quad (3.8)$$

En efecto, como $\mu_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})$, entonces que c es a lo menos igual a cero, si no contradice que $\gamma_l \in \Delta$. Desde ahora sea $c \geq 0$ el entero más grande que satisface (3.8).

Si $c = 0$, entonces iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el elemento $\sigma - \gamma_l$ tal que satisface alguna de las siguientes características:

1. $\mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) = 0$
2. $0 < \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) < \mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$

En el **Caso 1.** se verifica el lema y por lo mismo el hecho. En el **Caso 2.** como se tiene que la menor terna linealmente independiente está compuesta por ρ_1 , γ_1 y $\sigma - \gamma_l$ (o eventualmente algún $\gamma_j - \gamma_l$ para $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = \mathcal{L}_3(\sigma)$), esto asegura que los \mathcal{L}_3 -valores de la \mathcal{L} -elección para ξ' son estrictamente menores que k . En el caso que $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l)$, usamos el Hecho 1 para volver, en el peor de los casos, a un conjunto de exponentes monomiales como en el inciso iii del Hecho 1. Por la hipótesis de recurrencia sobre k , tenemos que también se verifica el hecho.

(\star) Entonces podemos suponer que existe $c_0 > 0$ tal que para todo $c < c_0$ se sigue verificando el hecho. Dicho de otra forma, el hecho es cierto para todo conjunto de exponentes monomiales con la forma $\xi = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ con \mathcal{L} -elección, $\Delta := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, y en donde se satisface:

1. $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$, $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$
2. $[\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2] \leq I_0$,
3. Existe $\sigma \in \xi$ tal con \mathcal{L}_3 -valor mínimo entre todos los $\gamma_i \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_s\}$ tal que
 - a) $\sigma = \lambda_i\rho_1 + \kappa_i\gamma_1 + \mu_i\gamma_l$ con $\lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{Q}$ y $\mu_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})$.
 - b) El entero $c \geq 0$ más grande que satisface (3.8), es estrictamente menor que c_0 .

Demostraremos que después de una secuencia de la iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, generamos un conjunto de exponentes monomiales ξ' de la forma $\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ con ρ_1 primitivo o ξ' verifica el lema.

Por verificarlo para $c_0 > 0$. Una iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' tal que la \mathcal{L} -elección, $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_{l'}\}$, satisface que (podría no haber cambio de \mathcal{L} -elección)

$$\mathcal{L}_3(\rho'_1) = 0, \mathcal{L}_3(\gamma'_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1) \text{ y } \mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_l) = k.$$

En el peor de los casos ξ' satisface que $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = \mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) = k$, sin embargo, en virtud del Hecho 1, podemos suponer que esto no ocurre y se tiene que $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) < \mathcal{L}_3(\gamma'_{l'}) = k$. Observe que ξ' también contiene el elemento .

$$\sigma - \gamma_l \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$$

Entonces por 3.b) de (\star) tenemos que:

$$\mathcal{L}_3(\gamma_l) \leq \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l) - (c_0 - 1)\mathcal{L}_3(\gamma_l),$$

luego

$$((c_0 - 1) + 1) \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_l)}_{=k} \leq \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l)$$

Por la Observación 7 tenemos que $\sigma - \gamma_l$ satisface 3.b) de (\star) . Luego por hipótesis de recurrencia, se obtiene que el hecho también es cierto para $c = c_0$. Lo que prueba el hecho en el caso $\mu_i \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

Ahora supongamos que $\mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Si $\mu_i = 0$, tenemos que σ es linealmente dependiente con ρ_1 y γ_1 . Entonces si iteramos una vez el \mathcal{L} -algoritmo, el elemento σ genera los vectores $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \rho_1$ en ξ' (no genera el vector $\sigma - \gamma_l$).

Sea $c \geq 0$ el entero más grande tal que

$$(c + 1)\mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\sigma)$$

Supongamos que $c = 0$, luego tenemos dos casos

1. $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\sigma)$
2. $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\sigma) < 2\mathcal{L}_3(\gamma_1)$

Observe que en el **Caso 1** podría haber o no un cambio en la \mathcal{L} -elección de ξ' . Sin embargo, en todos los casos en la próxima iteración se generará un elemento $\delta \in \xi''$, con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero, que no pertenece al retículo

$\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$. En el peor de los casos $\delta = \lambda\rho_1$, con $\lambda \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})_{>1}$. Ahora aplicando la Reducción 1, tenemos que en $\lfloor \lambda \rfloor$ iteraciones obtenemos el elemento

$$\rho'_1 = \delta - \lfloor \lambda \rfloor \rho_1$$

Tal que reduce el valor del índice

$$[\mathbb{Z}\rho'_1 : \mathbb{R}\rho'_1 \cap \mathbb{Z}^2] < I := [\mathbb{Z}\rho_1 : \mathbb{R}\rho_1 \cap \mathbb{Z}^2].$$

Lo cual prueba el hecho en el **Caso 1**.

Para el caso $c = 0$, $\mu_i = 0$, utilizaremos recurrencia sobre $\mathcal{L}_3(\sigma)$.

Cuando $\mathcal{L}_3(\sigma) = 1$, solo podría ocurrir el **Caso 1**, en efecto $\mathcal{L}_3(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Esto muestra que el hecho es verdad para $c = 0$, $\mu_i = 0$ y $\mathcal{L}_3(\sigma) = 1$. Supongamos que existe un m tal que el hecho es cierto para todo $c = 0$, $\mu_i = 0$ y $\mathcal{L}_3(\sigma) < m$. Por verificar para $\mathcal{L}_3(\sigma) = m$.

Como el **Caso 1**, reduce el índice I , independiente del valor $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$. Por lo que solo basta analizar el **Caso 2**, para $c = 0$, $\mu_i = 0$ y $\mathcal{L}_3(\sigma) = m$.

Al iterar el \mathcal{L} -algoritmo una vez, obtendremos un conjunto de exponentes monomiales ξ' , que contiene al elemento $\gamma'_1 = \sigma - \gamma_1$ tal que

1. ρ_1, γ'_1 y γ_l son linealmente independientes
2. $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1)$
3. El vector γ_1 no pertenece al retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma'_1, \gamma_l\}$. Más aún γ_1 es el elemento con menor \mathcal{L}_3 -valor con esta propiedad.

Recordemos que: $\sigma = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1$, luego podemos expresar γ_1 como

$$\gamma_1 = -\frac{\lambda_i}{\kappa_i - 1} \rho_1 + \frac{1}{\kappa_i - 1} \gamma'_1$$

Por lo tanto, ξ' satisface todas las condiciones para aplicar la hipótesis de recurrencia sobre m . Luego el hecho es cierto para $\mu_i = 0$, $c = 0$.

Podemos suponer que existe c_0 tal que el hecho es cierto para $\mu_i = 0$ y para todo $c < c_0$. Por verificar para $c = c_0$, es decir, para el conjunto de exponentes monomiales tales que existe un $c_0 \geq 1$ tal que

$$(c_0 + 1)\mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\sigma)$$

recordar que: $\sigma \in \xi$ con menor \mathcal{L}_3 -valor entre todos los $\gamma_i \in \xi$, pero $\sigma \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$.

Tenemos que en una iteración del \mathcal{L} -algoritmo se genera el conjunto de exponentes monomiales, ξ' tal que, en el peor de los casos, podemos suponer que su \mathcal{L} -elección $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$, el \mathcal{L}_3 -valor de γ'_l no disminuye. Sin embargo, el conjunto ξ' contiene el elemento $\sigma - \gamma_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$. Luego

$$((c_0 - 1) + 1)\mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_1)$$

Por la Observación 7 tenemos que $\sigma - \gamma_1$, en la base Δ' , sigue cumpliendo con la hipótesis $\mu_i = 0$. Esto prueba que el hecho es verdad para $\mu_i = 0$.

Podemos suponer que existe un entero u_0 tal que para todo $\mu_i < u_0$ el hecho es verdad. demostrar el caso $\mu_i = u_0$.

Al iterar una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto de exponentes monomiales ξ' , recordemos que siempre podemos suponer, en el peor de los casos, que para su \mathcal{L} -elección $\Delta' := \{\rho'_1, \gamma'_1, \gamma'_l\}$, el \mathcal{L}_3 -valor de γ'_l no disminuye. Sin embargo el conjunto ξ' contiene los elementos $\sigma - \gamma_1$ y $\sigma - \gamma_l \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$. Como $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_l)$, entonces $\mathcal{L}_3(\sigma - \gamma_l)$ es elemento en ξ' con menor \mathcal{L}_3 -valor fuera del retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$ y como

$$\sigma - \gamma_l = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + (\mu_0 - 1)\gamma_l$$

Por la Observación 7 tenemos que $\sigma - \gamma_l$, en la base Δ' , sigue cumpliendo con la hipótesis $\mu_i \in \mathbb{Z}$. Por la hipótesis de recurrencia sobre μ_i , se prueba que el hecho es verdad para $\mu_i \in \mathbb{Z}$ y en consecuencia, para $\mathcal{L}_3(\gamma_l) = k$. Lo que concluye la demostración del segundo hecho. \square

\square

OBSERVACIÓN 8. *En virtud de los Lemas 3.1 y 3.2, dado un conjunto de exponentes monomiales ξ , podemos suponer que ξ satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. ξ posee un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero.
2. ξ posee dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero.

3. La \mathcal{L} -elección Δ del conjunto ξ forma una base de \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 .

El siguiente hecho nos permitirá estudiar los coeficientes de las combinaciones lineales en los conjuntos de exponentes monomiales ξ que poseen un elemento primitivo con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero.

HECHO 3. Sea $\xi = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$, un conjunto de exponentes monomiales cuya \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, tal que ρ_1 es primitivo, $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$ y $0 < \mathcal{L}_3(\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_l)$. Considere $\gamma_j \in \xi$ en términos de la base Δ .

$$\gamma_j = \lambda_j \rho_1 + \kappa_j \gamma_1 + \mu_j \gamma_l, \text{ donde } \lambda_j, \kappa_j, \mu_j \in \mathbb{Q}$$

Si $\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{Z}$, entonces $\lambda_j \in \mathbb{Z}$.

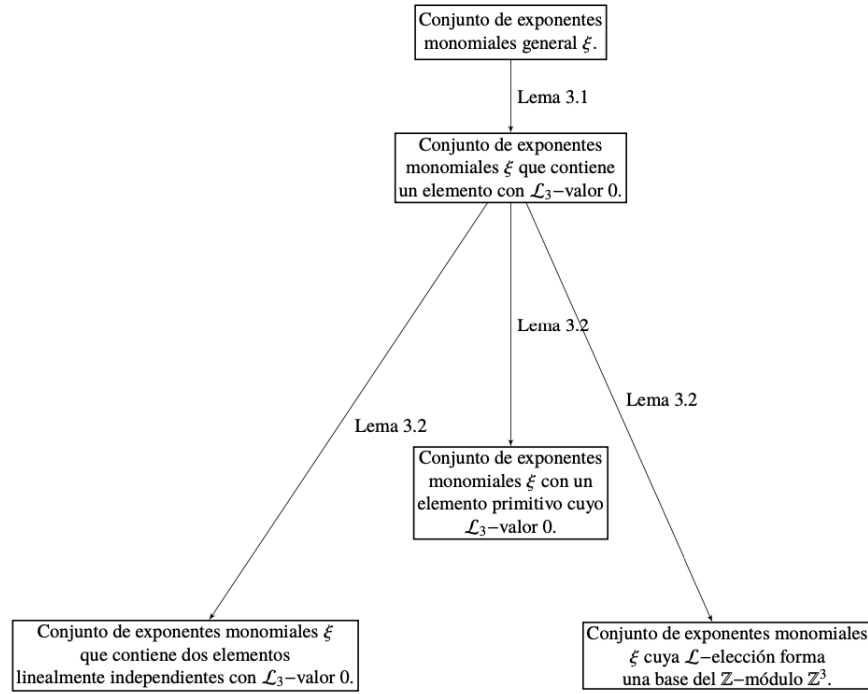
PRUEBA DEL HECHO. Sabemos que $\mathcal{L}_i(\gamma_1) \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{L}_i(\gamma_l) \in \mathbb{Z}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Al aplicar \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 a γ_j obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathcal{L}_1(\gamma_j)}_{\in \mathbb{Z}} &= \lambda_j \underbrace{\mathcal{L}_1(\rho_1)}_{\in \mathbb{Z}} + \kappa_j \underbrace{\mathcal{L}_1(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + \mu_j \underbrace{\mathcal{L}_1(\gamma_l)}_{\in \mathbb{Z}} \\ \underbrace{\mathcal{L}_2(\gamma_j)}_{\in \mathbb{Z}} &= \lambda_j \underbrace{\mathcal{L}_2(\rho_1)}_{\in \mathbb{Z}} + \kappa_j \underbrace{\mathcal{L}_2(\gamma_1)}_{\in \mathbb{Z}} + \mu_j \underbrace{\mathcal{L}_2(\gamma_l)}_{\in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Al ser ρ_1 primitivo se tiene que $\mathcal{L}_1(\rho_1)$ y $\mathcal{L}_2(\rho_1)$ son primos relativos (recordar que $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = y$ y $\mathcal{L}_3(x, y, z) = z)$), en consecuencia $\lambda_j \in \mathbb{Z}$.

□

En virtud de los Lemas 3.1 y 3.2, tenemos que, dado un conjunto de exponentes monomiales ξ , entonces ξ debe satisfacer alguna de las 3 condiciones descritas en el siguiente diagrama.



Tal como se mencionó en la Observación 8, un conjunto de exponentes monomiales ξ tal que:

- no tiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a cero.
- su \mathcal{L} -elección no forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 ,

se puede suponer que tiene la forma

$$\xi = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_r\},$$

y su \mathcal{L} -elección es $\Delta := \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$, donde ρ_1 es un vector primitivo con $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$. Notemos que $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{l-1}$ son linealmente dependientes a γ_1 y/o ρ_1 . En efecto, si existe $\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \gamma_1 + \mu_i \gamma_l$ con $1 < i < l$ donde $\lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{Q}$ y $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces γ_i es linealmente independiente a ρ_1, γ_1 , lo que contradice el hecho que $\Delta = \{\rho_1, \gamma_1, \gamma_l\}$ se compone con la menor terna linealmente independiente según el orden inducido por \mathcal{L} , pues $\mathcal{L}(\gamma_i) < \mathcal{L}(\gamma_l)$.

Desde ahora para un conjunto de exponentes monomiales que satisface la opción 1 de la Observación 8, utilizaremos la siguiente notación:

$$\xi = \{\rho_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \quad (3.9)$$

donde:

- La \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta := \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, con $\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\gamma_1)$, $\mathcal{L}_3(\rho_1) = 0$ y $0 \leq \mathcal{L}_3(\delta_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$.
- ρ_1 es primitivo.
- $\delta_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_1$, con $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $\kappa_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, para cada $2 \leq i \leq t$.
- $\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_i + \mu_i \gamma_1$ con $\lambda_i, \kappa_i, \mu_i \in \mathbb{Q}$, para cada $2 \leq i \leq r$.

Respecto al orden inducido por \mathcal{L} , podemos suponer que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_2) < \cdots < \mathcal{L}(\delta_t)$$

$$\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \cdots < \mathcal{L}(\gamma_r).$$

LEMA 3.3. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales de la forma 3.9, la iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- i. *El conjunto ξ' contiene dos elementos linealmente independiente con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.*
- ii. *La \mathcal{L} -elección de conjunto ξ' forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 .*

DEMOSTRACIÓN. La demostración del lema seguirá por inducción sobre $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$.

HECHO 4. *Supongamos que el conjunto de exponentes monomiales ξ como en (3.9), satisface que $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 1$. Entonces el lema se verifica para ξ .*

PRUEBA DEL HECHO. Dado que el orden inducido por \mathcal{L} precisa la desigualdad $0 < \mathcal{L}_3(\delta_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$, se tiene que $\mathcal{L}_3(\delta_1)$ también es 1. Recordemos de (3.9) que los elementos del conjunto ξ se puede representar como alguna de las siguientes combinaciones lineales:

1. $\delta_j = \lambda_j \rho_1 + \kappa_j \delta_1$, con $\lambda_j \in \mathbb{Q}$ y $\kappa_j \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$.
2. $\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_1 + \mu_i \gamma_1$, con $\lambda_i, \kappa_i, \mu_i \in \mathbb{Q}$

Desde la primera combinación lineal, podemos observar que

$$\mathcal{L}_3(\delta_j) = \kappa_j \mathcal{L}_3(\delta_1)$$

como $\mathcal{L}_3(\delta_1) = 1$, se deduce $\kappa_j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Luego por el Hecho 3 tenemos que λ_j es un número entero.

Desde la segunda combinación lineal, tenemos que:

$$\mathcal{L}_3(\gamma_i) = \lambda_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\rho_1)}_{=0} + \kappa_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\delta_1)}_{=1} + \mu_i \underbrace{\mathcal{L}_3(\gamma_1)}_{=1} = k_i + \mu_i$$

Como $k_i + \mu_i$ debe ser un número entero positivo, se tiene que $\mu_i \in \mathbb{Z}$ si y solo si $\kappa_i \in \mathbb{Z}$. Por el Hecho 3, si κ_i o μ_i son enteros, entonces λ_i es un número entero.

Luego, si para cada $\gamma_i \in \xi$ de la forma $\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_1 + \mu_i \gamma_1$, se cumple que κ_i o $\mu_i \in \mathbb{Z}$, entonces la \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 . En efecto, $\mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\} = \mathbb{Z}\xi = \mathbb{Z}^3$.

Por lo tanto, podemos suponer que existe $\gamma_i \in \xi$ de la forma $\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_1 + \mu_i \gamma_1$ tal que κ_i y $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Consideremos el elemento $\gamma_{i_0} \in \xi$ con menor \mathcal{L} -valor, tal que κ_{i_0} y $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Demostraremos por inducción sobre $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0})$ que se satisface el hecho.

Si $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = 1$, luego $\kappa_{i_0} + \mu_{i_0} = 1$, iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, γ_{i_0} genera en ξ^1 los elementos

$$\gamma_{i_0} - \delta_1 = \lambda_{i_0} \rho_1 + (\kappa_{i_0} - 1) \delta_1 + \mu_{i_0} \gamma_1.$$

$$\gamma_{i_0} - \gamma_1 = \lambda_{i_0} \rho_1 + \kappa_{i_0} \delta_1 + (\mu_{i_0} - 1) \gamma_1.$$

Notemos que el elemento $\gamma_{i_0} - \gamma_1 \in \xi^1$ tiene \mathcal{L}_3 -valor 0 y es linealmente independiente a ρ_1 , en efecto, $\kappa_{i_0} \neq 0$ y $(\mu_{i_0} - 1) \neq 0$. Por lo tanto, se satisface el lema para $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = 1$.

También estudiaremos el caso $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = 2$, dado que en una segunda iteración del \mathcal{L} -algoritmo podría haber un cambio de elección fuera del retículo $\mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Si $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = 2$, se tiene que $\kappa_{i_0} + \mu_{i_0} = 2$, κ_{i_0} y $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se generan en ξ^1 elementos de la forma:

$$\delta_j - \delta_1 = \lambda_j \rho_1 + (\kappa_j - 1) \delta_1$$

$$\gamma_{i_0} - \delta_1 = \lambda_{i_0} \rho_1 + (\kappa_{i_0} - 1) \delta_1 + \mu_{i_0} \gamma_1.$$

$$\gamma_{i_0} - \gamma_1 = \lambda_{i_0} \rho_1 + \kappa_{i_0} \delta_1 + (\mu_{i_0} - 1) \gamma_1.$$

y en el caso que δ_j es linealmente independiente a los vectores δ_1, γ_1 , se genera el elemento

$$\delta_j - \rho_1 = (\lambda_j - 1) \rho_1 + \kappa_j \delta_1$$

Análogamente en el caso que γ_{i_0} es linealmente independiente a los vectores δ_1, γ_1 , se genera el elemento

$$\gamma_{i_0} - \rho_1 = (\lambda_{i_0} - 1)\rho_1 + \kappa_{i_0}\delta_1 + \mu_{i_0}\gamma_1.$$

En particular, $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \rho_1) = 2$, $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \delta_1) = 1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \gamma_1) = 1$.

Si la \mathcal{L} -elección sigue siendo $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, en la próxima iteración del \mathcal{L} -algoritmo, se genera el conjunto ξ^2 que contiene al elemento $\gamma_{i_0} - 2\delta_1 = \lambda_{i_0}\rho_1 + (\kappa_{i_0} - 2)\delta_1 + \mu_{i_0}\gamma_1$, cuyo \mathcal{L}_3 -valor es cero y es linealmente independiente a ρ_1 , pues $\mu_{i_0} \neq 0$ y $(\kappa_{i_0} - 2) \neq 0$.

Si la \mathcal{L} -elección cambia a una nueva terna $\Delta' \subset \xi^1$, necesariamente un elemento $\sigma \in \Delta'$ reemplazará a δ_1 o γ_1 . Notemos que σ no puede tener la forma $\delta_j - \delta_1$ o $\delta_j - \rho_1$, ya que se contradice la independencia de los elementos que componen Δ' , y tampoco se puede escribir como $\gamma_{i_0} - \rho_1$, ya que $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \rho_1) = 2$, luego σ puede tener alguna de las siguientes formas:

- $\sigma = \delta_j - \gamma_1$, donde $\delta_j = \lambda_j\rho_1 + \kappa_j\delta_1$ y $\mathcal{L}_3(\delta_j) = 1$.
- $\sigma = \gamma_j - \rho_1$, donde $\gamma_j = \lambda_j\rho_1 + \kappa_j\delta_1 + \mu_j\gamma_1$ con $\kappa_j \in \mathbb{Z}$ o $\mu_j \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = 1$.
- $\sigma = \gamma_j - \delta_1$, donde $\gamma_j = \lambda_j\rho_1 + \kappa_j\delta_1 + \mu_j\gamma_1$ con $\kappa_j \in \mathbb{Z}$ o $\mu_j \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = 2$.
- $\sigma = \gamma_j - \gamma_1$, donde $\gamma_j = \lambda_j\rho_1 + \kappa_j\delta_1 + \mu_j\gamma_1$ con $\kappa_j \in \mathbb{Z}$ o $\mu_j \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = 2$.
- $\sigma = \gamma_{i_0} - \delta_1$, donde $\gamma_{i_0} = \lambda_{i_0}\rho_1 + \kappa_{i_0}\delta_1 + \mu_{i_0}\gamma_1$ con $\kappa_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ o $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
- $\sigma = \gamma_{i_0} - \gamma_1$, donde $\gamma_{i_0} = \lambda_{i_0}\rho_1 + \kappa_{i_0}\delta_1 + \mu_{i_0}\gamma_1$ con $\kappa_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ o $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

En la próxima iteración, se genera al menos uno de los siguientes elementos:

1. $\delta_1 - \sigma$, en el caso que $\delta_1 \notin \Delta'$
2. $\gamma_1 - \sigma$, en el caso que $\gamma_1 \notin \Delta'$

donde $\sigma \in \Delta' \setminus \{\rho_1\}$ y $\mathcal{L}_3(\sigma) = 1$. En cualquier caso, el vector generado tiene \mathcal{L} -valor cero. Ahora verificamos que cada opción para σ genera un elemento linealmente independiente a ρ_1 .

- Si $\sigma = \delta_j - \gamma_1$, entonces el elemento $\delta_1 - \sigma = -\lambda_j\rho_1 + (1 - \kappa_j)\delta_1 + \gamma_1$ es linealmente independiente a ρ_1 . En el caso que $\delta_1 - \sigma \notin \xi^1$, se tiene que

el elemento $\gamma_1 - \sigma = -\lambda_j \rho_1 - \kappa_j \delta_1 + 2\gamma_1$ el cual también es linealmente independiente a ρ_1 .

- Si $\sigma = \gamma_j - \rho_1$, entonces $\delta_1 - \sigma = (1 - \lambda_j)\rho_1 + (1 - \kappa_j)\delta_1 - \underbrace{\mu_j}_{\neq 0} \gamma_1$ el cual es linealmente independiente a ρ_1 . Por otro lado, si $\delta_1 - \sigma \notin \xi^1$, se tiene que el elemento $\gamma_1 - \sigma = (1 - \lambda_j)\rho_1 + \underbrace{\kappa_j}_{\neq 0} \delta_1 + (1 - \mu_i)\gamma_1$, el cual es linealmente independiente a ρ_1 .
- Si $\sigma = \gamma_j - \delta_1$ entonces $\delta_1 - \sigma = -\lambda_j \rho_1 + (2 - \kappa_j)\delta_1 - \mu_j \gamma_1$, donde $\gamma_j = \lambda_j \rho_1 + \kappa_j \delta_1 + \mu_j \gamma_1$, notemos que $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = \underbrace{\kappa_j}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\mu_j}_{\in \mathbb{Z}} = 2$, luego si $\mu_j \neq 0$, se tiene que $\delta_1 - \sigma$ es linealmente independiente a ρ_1 , si $\mu_j = 0$ entonces $\delta_1 - \sigma = -\lambda_j \rho_1$ lo que contradice la esencialidad del conjunto ξ^1 . De forma análoga, $\gamma_1 - \sigma = -\lambda_j \rho_1 + (1 - \kappa_j)\delta_1 - (1 - \mu_j)\gamma_1$, donde $\gamma_j = \lambda_j \rho_1 + \kappa_j \delta_1 + \mu_j \gamma_1$, dado que $\mathcal{L}_3(\gamma_j) = \underbrace{\kappa_j}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\mu_j}_{\in \mathbb{Z}} = 2$, luego si $\mu_j \neq 1$, se tiene que $\delta_1 - \sigma$ es linealmente independiente a ρ_1 , si $\mu_j = 1$ entonces $\delta_1 - \sigma = -\lambda_j \rho_1$ lo que contradice la esencialidad del conjunto ξ^1 .
- Si $\sigma = \gamma_j - \gamma_1$, la prueba sigue de manera análoga al caso $\sigma = \gamma_j - \delta_1$.
- Si $\sigma = \gamma_{i_0} - \delta_1$, entonces $\delta_1 - \sigma = -\lambda_{i_0} \rho_1 + (2 - \kappa_{i_0})\delta_1 + \mu_{i_0} \gamma_1$, donde $\gamma_{i_0} = \lambda_{i_0} \rho_1 + \kappa_{i_0} \delta_1 + \mu_{i_0} \gamma_1$ y $\kappa_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ o $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. de esta manera, el elemento $\delta_1 - \sigma$ es linealmente independiente a ρ_1 . Del mismo modo, el elemento $\gamma_1 - \sigma = -\lambda_{i_0} \rho_1 + (1 - \kappa_{i_0})\delta_1 + (1 + \mu_{i_0})\gamma_1$, y como por definición de γ_{i_0} , $\kappa_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ o $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se tiene que el elemento $\gamma_1 - \sigma$ es linealmente independiente a ρ_1 .
- Si $\sigma = \gamma_{i_0} - \gamma_1$, la prueba sigue de forma análoga al caso $\sigma = \gamma_{i_0} - \delta_1$.

Luego, el hecho es verdad para $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = 2$.

Supongamos que todo conjunto de exponentes monomiales ξ de la forma descrita en 3.9, tal que contiene al menos un elemento γ_{i_0} de la forma $\lambda_{i_0} \rho_1 + \kappa_{i_0} \delta_1 + \mu_{i_0} \gamma_1$ con κ_{i_0} y $\mu_{i_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, satisface el hecho. Lo verificaremos para $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = k > 2$.

Iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto ξ^1 que contiene los elementos

$$\gamma_{i_0} - \delta_1 \text{ y } \gamma_{i_0} - \gamma_1$$

tales que:

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \delta_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) - \mathcal{L}_3(\delta_1) = \kappa_{i_0} + \mu_{i_0} - 1 = k - 1 > 1.$$

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0} - \gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) - \mathcal{L}_3(\gamma_1) = \kappa_{i_0} + \mu_{i_0} - 1 = k - 1 > 1.$$

Solo resta probar que ξ^1 satisface las mismas condiciones que la hipótesis de inducción.

Si la \mathcal{L} -elección sigue siendo $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, terminamos la demostración, pues el elemento $\gamma_{i_0} - \gamma_1$ se puede expresar como:

$$\gamma_{i_0} - \gamma_1 = \lambda_{i_0} \rho_1 + \underbrace{\kappa_{i_0}}_{\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}} \delta_1 + \underbrace{(\mu_{i_0} - 1)}_{\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}} \gamma_1$$

y por la definición de γ_{i_0} , es directo que los coeficientes κ_{i_0} y $(\mu_{i_0} - 1) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Si la \mathcal{L} -elección para ξ^1 cambia a la terna $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$, entonces $\mathcal{L}_3(\delta'_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma'_1) = 1$, pues debes tener menor \mathcal{L} -valor que δ_1 y γ_1 , y por hipótesis $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 1$ y $0 < \mathcal{L}_3(\delta_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$.

Si $\mathcal{L}_3(\delta'_1) = 0$ el lema se satisface directamente, entonces podemos suponer que $\mathcal{L}_3(\delta'_1) = 1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = 1$, dado que γ_{i_0} es un elemento con menor \mathcal{L} -valor con coeficientes racionales propios y $\mathcal{L}_3(\gamma_{i_0}) = \kappa_{i_0} + \mu_{i_0} > 2$, los elementos

$$\gamma_{i_0} - \gamma_1 \text{ y } \gamma_{i_0} - \delta_1 \notin \Delta'$$

Además, gracias a la observación 7, al menos uno de ellos se puede expresar de la forma $\lambda' \rho'_1 + \kappa' \delta'_1 + \mu' \gamma'_1$ tal que κ' y $\mu' \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Lo anterior permite concluir que el hecho es cierto. □

Como se mencionó anteriormente, la demostración del lema se hará por inducción sobre $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$. Gracias al Hecho 4, se tiene que el lema se cumple para $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 1$, como hipótesis inductiva, suponemos que todo conjunto de

exponentes monomiales ξ de la forma descrita en (3.9) que contiene un elemento

$$\gamma_i = \lambda_i \rho_1 + \kappa_i \delta_1 + \mu_i \gamma_1$$

con κ_i y $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_1) < h$, satisface el lema. Lo verificaremos para $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = h$.

HECHO 5. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales con las propiedades descritas en 3.9. Entonces después de una iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se obtiene un conjunto de exponentes monomiales, ξ' , con \mathcal{L} -elección $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$, con $\rho'_1 = \rho_1$, que cumple alguna de las siguientes propiedades:*

1. ξ' satisface la conclusión del lema.
2. $\mathcal{L}_3(\delta'_1) < \mathcal{L}_3(\gamma'_1) \leq h$ y existe $\gamma' \in \xi' \setminus \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$ tal que $h < \mathcal{L}_3(\gamma') < 2h$

DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Por principio de iteración 1, supongamos que ξ no satisface la conclusión del lema.

Entonces se tiene que al iterar el \mathcal{L} -algoritmo de Nash comenzando con el conjunto ξ , tendríamos que cada nuevo conjunto de exponentes monomiales generado, ξ' , tiene \mathcal{L} -elección $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$, donde Δ' no contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor cero, Δ' no es una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 . Luego existe $\gamma' \in \xi' \setminus \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\xi' = \xi$, $\Delta' = \Delta$ y $\gamma' = \gamma_{j_0} = \lambda_{j_0} \rho_1 + \kappa_{j_0} \delta_1 + \mu_{j_0} \gamma_1$.

Sea $m := \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0})$, notemos que siempre podemos reducir el valor de m , en efecto, aplicando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto de exponentes monomiales ξ' , cuya \mathcal{L} -elección es $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$. Como los conjuntos de vectores $\{\gamma_{j_0}, \rho_1, \delta_1\}$ y $\{\gamma_{j_0}, \rho_1, \gamma_1\}$ no pueden ser linealmente dependientes simultáneamente, entonces en ξ' se genera a lo menos uno de los siguientes vectores:

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1, \gamma_{j_0} - \delta_1$$

En ambos casos se tiene que

$$h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) = m$$

$$h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \delta_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) = m$$

Además, como en ambos casos el \mathcal{L}_3 -valor es estrictamente más grande que h , se obtiene que $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\} \subset \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, en particular $\mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\} = \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Entonces se tiene que

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1, \gamma_{j_0} - \delta_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$$

en efecto, supongamos que $\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$. Como $\mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\} = \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, entonces $\gamma_{j_0} = (\gamma_{j_0} - \gamma_1) + \gamma_1 \in \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Lo que es una contradicción. Análogo para $\gamma_{j_0} - \delta_1$.

Luego, podemos suponer que el conjunto de exponentes monomiales ξ con \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ contiene un elemento

$$\gamma_{j_0} = \lambda_{j_0}\rho_1 + \kappa_{j_0}\delta_1 + \mu_{j_0}\gamma_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$$

con menor \mathcal{L} -valor, tal que

$$h \leq \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) \leq 2h.$$

Por el argumento anterior, si $\mathcal{L}_3(\delta_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1) = h$, habremos probado el hecho directamente.

Ahora supongamos que $\mathcal{L}_3(\delta_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = h$. Además, digamos que

$$h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) < 2h,$$

y que $\mu_{j_0} \neq 0$. Aplicando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto de exponentes monomiales ξ' , cuya \mathcal{L} -elección es Δ' . Como $\mu_{j_0} \neq 0$, entonces γ_{j_0} , ρ_1 y δ_1 son linealmente independientes, luego $\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \xi'$. Además se satisface que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) < h$$

Si $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) < h$, luego por hipótesis de recurrencia sobre h tendríamos que se satisface el lema, y por lo tanto el hecho. Entonces, podemos suponer que $\mathcal{L}_3(\delta'_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1)$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = h$.

En particular se obtiene que

$$\mathcal{L}_3(\delta'_1) < \mathcal{L}_3(\gamma'_1)$$

Si $\mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\} = \mathbb{Z}^3$, habremos probado el lema para este caso. Consideremos $\gamma'_{j_0} \in \xi'$ el elemento con menor \mathcal{L} -valor dentro de los $\gamma'_j = \lambda'_j \rho'_1 + \kappa'_j \delta'_1 + \mu'_j \gamma'_1 \in \xi'$ con $\gamma'_j \notin \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$. Si $\mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) \leq 2h$, se prueba el hecho. Supongamos que

$$2h < m := \mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}).$$

Como se realizó anteriormente, podemos considerar una secuencia de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo del conjunto ξ' para bajar el m y probar el hecho para el caso $h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) < 2h$ y que $\mu_{j_0} \neq 0$.

El caso $h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) < 2h$ con que $\mu_{j_0} = 0$ es análogo a lo anterior.

Nos falta estudiar el caso $\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) \in \{h, 2h\}$ con $\mathcal{L}_3(\delta_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = h$.

Observe que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) = (\kappa_{j_0} + \mu_{j_0})h$$

Entonces $\kappa_{j_0} + \mu_{j_0} \in \{1, 2\}$. Como $(\kappa_{j_0}, \mu_{j_0}) \notin \mathbb{Z}^2$, tenemos que $\kappa_{j_0} \neq 0$ y $\mu_{j_0} \neq 0$.

Aplicando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto de exponentes monomiales ξ' , cuya \mathcal{L} -elección es $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$. Como $\mu_{j_0} \neq 0$ los conjuntos de vectores $\{\gamma_{j_0}, \rho_1, \delta_1\}$ son linealmente dependientes, entonces en ξ' se genera el siguiente vector

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \xi'$$

De forma análoga, se obtiene que $\gamma_{j_0} - \delta_1 \in \xi'$.

Supongamos que $\mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) = h$. Como $\mathcal{L}_3(\delta_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = h$, obtenemos que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) = 0$$

El vector $\gamma_{j_0} \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$, entonces $\gamma_{j_0} - \gamma_1$, es linealmente independiente de ρ_1 (ver Hecho 3). Lo que prueba el hecho en el caso $\mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) = h$.

Ahora supongamos que $\mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) = 2h$. Iterando una vez, obtenemos que $\gamma_{j_0} - \gamma_1, \gamma_{j_0} - \delta_1, \gamma_1, \delta_1$ son elementos de ξ' que satisfacen que:

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \delta_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\delta_1) = h$$

Sea $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$ la nueva elección para ξ' . Podemos suponer que $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = \mathcal{L}_3(\delta'_1) = h$, en el caso contrario habríamos probado el hecho.

Supongamos que $\Delta' \subset \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Además, supongamos que

$$\{\gamma_{j_0} - \gamma_1, \rho'_1, \delta'_1\} \text{ y } \{\gamma_{j_0} - \delta_1, \rho'_1, \delta'_1\}$$

son linealmente dependientes de forma simultanea, entonces existen números racionales a_i, b_1 tales que

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1 = a_1 \rho'_1 + a_2 \delta'_1$$

$$\gamma_{j_0} - \delta_1 = b_1 \rho'_1 + b_2 \gamma'_1$$

Como $\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \delta_1) = \mathcal{L}_3(\delta_1) = h$ y $\rho'_1 = \rho_1$, obtenemos que $a_2 = b_2 = 1$. Luego

$$\gamma_1 - \delta_1 + (a_1 - b_1)\rho_1 = 0$$

lo que contradice que $\rho_1, \delta_1, \gamma_1$ son linealmente independiente. Luego alguno de los conjuntos $\{\gamma_{j_0} - \gamma_1, \rho'_1, \delta'_1\}$ y $\{\gamma_{j_0} - \delta_1, \rho'_1, \delta'_1\}$ es linealmente independiente. Supongamos que $\{\gamma_{j_0} - \gamma_1, \rho'_1, \delta'_1\}$ lo es. Entonces en una próxima iteración podemos generar el elemento

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1 - \gamma'_1$$

Observe que $\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1 - \gamma'_1) = 0$ y que $\gamma_{j_0} - \gamma_1 - \gamma'_1$ no pertenece $\mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Luego es linealmente independiente a ρ_1 (recordar que ρ_1 es primitivo), lo que prueba el lema y por lo tanto el hecho. La demostración es análoga si $\{\gamma_{j_0} - \delta_1, \rho'_1, \delta'_1\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Ahora supongamos que $\Delta' \not\subseteq \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Entonces $\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \Delta'$ y $\gamma_1 \notin \Delta'$. Sea ξ'' una iteración sobre ξ' del \mathcal{L} -algoritmo.

Supongamos que $\gamma'_1 = \gamma_{j_0} - \gamma_1$.

Recuerde que $\kappa_{j_0} \neq 0$ y $\mu_{j_0} \neq 0$. Luego $\gamma_1, \gamma_{j_0} - \gamma_1, \rho'_1$ son linealmente independientes. Entonces $\gamma_1 - \delta'_1$ pertenece a ξ'' . Si $\gamma_1 - \delta'_1$ y $\rho'_1 = \rho_1$ son linealmente independientes, habremos probado el lema y en particular el hecho. Luego podemos suponer $\gamma_1 - \delta'_1$ y ρ_1 son linealmente dependientes. Como ρ_1 es primitivo y $\mathcal{L}(\delta'_1) < \mathcal{L}(\gamma_1)$, obtenemos que existe $a \in \mathbb{Z}_{<0}$ tal que

$$\delta'_1 = a\rho_1 + \gamma_1$$

En particular $\delta_1 \notin \Delta'$. Pero observe que $\delta_1, \delta'_1, \rho'_1 = \rho_1$ son linealmente independientes. Entonces en una próxima iteración podemos generar el elemento

$$\delta_1 - \gamma'_1 = \delta_1 - (\gamma_{j_0} - \gamma_1)$$

Este elemento tiene \mathcal{L}_3 -valor igual a cero y es linealmente independiente de ρ_1 , porque $\gamma_{j_0} \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ (ver Hecho 3).

El caso $\delta'_1 = \gamma_{j_0} - \gamma_1$ es análogo. Lo que termina la prueba del hecho en el caso $\mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) = 2h$. \square

Para terminar la demostración del lema, consecuencia del Hecho 5, podemos suponer que el conjunto de exponentes monomiales ξ satisface las siguientes condiciones:

- Su \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ cumple con $\mathcal{L}_3(\delta_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1)$.
- Contiene un elemento minimal $\gamma_{j_0} = \lambda_{j_0}\rho_1 + \kappa_{j_0}\delta_1 + \mu_{j_0}\gamma_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ tal que $h < \mathcal{L}_3(\gamma_{j_0}) < 2h$.

Iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, generamos el conjunto ξ' con \mathcal{L} -elección $\Delta' = \{\rho'_1 = \rho_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$. Además el vector $\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \xi'$ satisface que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_{j_0} - \gamma_1) < h$$

Como $\gamma_{j_0} - \gamma_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ se tiene que:

$$\gamma_{j_0} - \gamma_1 \in \Delta'$$

En el caso que $\gamma'_1 = \gamma_{j_0} - \gamma_1$, por hipótesis de recurrencia sobre h , tendríamos que se satisface el lema.

Si $\delta'_1 = \gamma_{j_0} - \gamma_1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) < h$, por hipótesis de recurrencia sobre h , también se satisface el lema.

Entonces digamos que $\delta'_1 = \gamma_{j_0} - \gamma_1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = h$. Recordemos que podemos suponer que en ξ' existe un elemento minimal $\gamma'_{j_0} \notin \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$, pues en caso contrario la \mathcal{L} -elección sería base del \mathbb{Z} módulo \mathbb{Z}^3 .

En virtud del Hecho 5, podemos decir que $h < \mathcal{L}_3(\gamma'_{j_0}) < 2h$, Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo una vez, se tiene que

$$\gamma'_{j_0} - \gamma'_1 \in \xi''$$

Al igual que antes, $\gamma'_{j_0} - \gamma'_1 \notin \mathbb{Z}\{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$ y $\gamma'_{j_0} - \gamma'_1 \in \Delta''$. Si $\mathcal{L}_3(\gamma''_1) < h$, por hipótesis de recurrencia sobre h , se satisface el lema.

En el peor de los casos, tendríamos que:

$$\delta'' = \gamma'_{j_0} - \gamma'_1 \text{ y que } \mathcal{L}_3(\gamma''_1) = h.$$

Notemos que de persistir el caso $\mathcal{L}_3(\gamma''_1) = h$, la finitud de enteros no negativos menores que h y la desigualdad estricta en los elementos de la \mathcal{L} -elección, garantiza que la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo genera 2 elementos en la elección con \mathcal{L}_3 -valor 0. Lo que termina la demostración del lema.

□

DEFINICIÓN 3.1. Sea $\xi = \{\rho_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ un conjunto de exponentes monomiales con \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$. Diremos que un isomorfismo $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es trivializante si:

1. $(\mathcal{T}(\rho_1), \mathcal{T}(\delta_1), \mathcal{T}(\gamma_1)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
2. Preserva las elecciones sucesivas. Es decir, para algún $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se tiene que después de s iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de ξ tenemos un cambio

de elección $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$ si y solo si después de s iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de $\mathcal{T}(\xi)$ tenemos un cambio de elección $\Delta'' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y más aún $(\mathcal{T}(\rho'_1), \mathcal{T}(\delta'_1), \mathcal{T}(\gamma'_1)) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$

Observe que esto no implica que \mathcal{T} preserve el \mathcal{L} -orden, esto en general es completamente falso.

LEMA 3.4. *Dado un conjunto de exponentes monomiales ξ de alguna variedad tórica esencial tal que la \mathcal{L} -elección Δ forma una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 , entonces después de una cantidad finita de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se obtiene un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- i. ξ' contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor 0.
- ii. ξ' tiene cardinalidad 3.
- iii. Para ξ' existe un isomorfismo lineal $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ trivializante.

DEMOSTRACIÓN. Por Principio de iteración 1, supondremos que durante las iteraciones realizadas no se cumple ii. del lema, ya que esto termina la demostración.

Consideremos un conjunto de exponentes monomiales esencial

$$\xi = \{\rho_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$$

con las características descritas en (3.9) y supongamos que la \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \delta_1, \gamma_1\}$ forma una base para el \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}^3 . Bajo estas hipótesis, cualquier elemento $\delta_j \in \xi$ con $2 \leq j \leq t$, puede expresarse como:

$$\delta_j = \lambda_{\delta_j} \rho_1 + \kappa_{\delta_j} \delta_1 \text{ con } \lambda_{\delta_j}, \kappa_{\delta_j} \in \mathbb{Z}$$

y cualquier elemento $\gamma_i \in \xi$ con $2 \leq i \leq r$, puede expresarse como:

$$\gamma_i = \lambda_{\gamma_i} \rho_1 + \kappa_{\gamma_i} \delta_1 + \mu_{\gamma_i} \gamma_1, \text{ con } \lambda_{\gamma_i}, \kappa_{\gamma_i}, \mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}$$

Dado que ξ es un conjunto de exponentes monomiales esencial de una variedad tórica singular, no todos los coeficientes pueden ser positivos. Más precisamente:

Para $\delta_j \in \xi$ se tiene que

$$\lambda_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \text{ y } \kappa_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{> 0}$$

(★) Para $\gamma_i \in \xi$, considerando que $\mathcal{L}_3(\gamma_i) \geq 0$, se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{<0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$.
2. $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{<0}$.
3. $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Los siguientes hechos prueban el lema. Primero estudiaremos la condición 3. de (★).

HECHO 6. Sea $\xi = \{\rho_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ un conjunto de exponentes monomiales tal que:

- $\delta_j = \lambda_{\delta_j} \rho_1 + \kappa_{\delta_j} \delta_1$, con $\lambda_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ y $\kappa_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{>0}$, para todo $2 \leq j \leq t$.
- $\gamma_i = \lambda_{\gamma_i} \rho_1 + \kappa_{\gamma_i} \delta_1 + \mu_{\gamma_i} \gamma_1$, con $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$, para todo $2 \leq i \leq r$.

Entonces existe un isomorfismo trivializante de ξ .

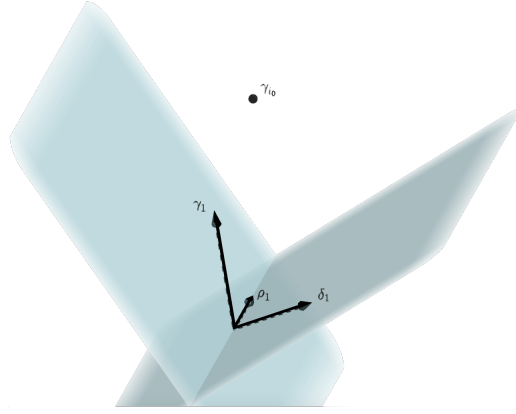
DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Como tenemos que

- $\delta_j = \lambda_{\delta_j} \rho_1 + \kappa_{\delta_j} \delta_1$, con $\lambda_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ y $\kappa_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{>0}$, para todo $2 \leq j \leq t$.
- $\gamma_i = \lambda_{\gamma_i} \rho_1 + \kappa_{\gamma_i} \delta_1 + \mu_{\gamma_i} \gamma_1$, con $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$, para todo $2 \leq i \leq r$.

Los elementos de ξ pertenecen a la región, R , delimitada por los semiplanos

$$H_1 = \mathbb{R}\rho_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\delta_1 \text{ y } H_2 = \mathbb{R}\rho_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\gamma_1,$$

ver la siguiente figura

FIGURA 3. Representación gráfica de la región R

Notemos que un elemento de la forma $\delta_j = \lambda_{\delta_j}\rho_1 + \kappa_{\delta_j}\delta_1$, con $\lambda_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ y $\kappa_{\delta_j} \in \mathbb{Z}_{> 0}$, pertenece a H_1 , en consecuencia, en la iteración del \mathcal{L} -algoritmo no se genera el elemento $\delta_j - \gamma_1$. Análogamente un elemento de la forma $\gamma_i = \lambda_{\gamma_i}\rho_1 + \mu_{\gamma_i}\gamma_1$, con $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{> 0}$ pertenece a H_2 y no genera el elemento $\gamma_i - \delta_1$.

En otras palabras, un elemento que pertenece a un semiplano, solo genera elementos en el semiplano.

Por otro lado, al aplicar el \mathcal{L} -algoritmo a un elemento de la forma $\gamma_i = \lambda_{\gamma_i}\rho_1 + \kappa_{\gamma_i}\delta_1 + \mu_{\gamma_i}\gamma_1$, con $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\kappa_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\mu_{\gamma_i} \in \mathbb{Z}_{> 0}$, puede generar elementos de la forma

$$\gamma_i - a\rho_1 - b\delta_1 - c\gamma_1$$

donde $b \leq \kappa_{\gamma_i}$ y $c \leq \mu_{\gamma_i}$, en otras palabras, un elemento al interior de la región R , puede generar elementos al interior de R y a lo más generar elementos en los semiplanos, pero en ningún caso un elemento fuera de R . Luego la región R es estable por las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, es decir, después de un número finito de iteraciones, se obtiene un conjunto de exponentes monomiales $\xi' \subset R$.

En particular, podemos iterar el \mathcal{L} -algoritmo hasta que algún elemento de la forma $\gamma_{i_0} = \lambda_{\gamma_{i_0}}\rho_1 + \kappa_{\gamma_{i_0}}\delta_1 + \mu_{\gamma_{i_0}}\gamma_1$, con $\lambda_{\gamma_{i_0}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\kappa_{\gamma_{i_0}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y

$\mu_{\gamma_{i_0}} \in \mathbb{Z}_{>0}$ con $\kappa_{\gamma_{i_0}} + \mu_{\gamma_{i_0}}$ minimal, genere un elemento en el semiplano H_1 con menor \mathcal{L} -valor que δ_1 y otro en el semiplano H_2 con menor \mathcal{L} que γ_1 . Notemos que después de $\kappa_{\gamma_{i_0}} + \mu_{\gamma_{i_0}} - 1$ iteraciones, se obtiene el conjunto ξ' , cuya \mathcal{L} -elección es $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$, donde

1. $\rho'_i = \rho_1$
2. $\delta'_1 = \lambda_{\delta'_1} \rho_1 + \delta_1$ donde $\lambda_{\delta'_1} \leq 0$
3. $\gamma'_1 = \lambda_{\gamma'_1} \rho_1 + \gamma_1$ donde $\lambda_{\gamma'_1} \leq 0$.

Entonces para probar el hecho basta encontrar una transformación lineal \mathcal{T} que preserve el \mathcal{L} -orden de los semiplanos H_1, H_2 . Observe que no necesariamente debe preservar los ordenes en la región R .

Consideremos el isomorfismo lineal

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = (\delta_1 \times \gamma_1 \cdot \mathbf{x}, \gamma_1 \times \rho_1 \cdot \mathbf{x}, \rho_1 \times \delta_1 \cdot \mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Observe que:

$$\mathcal{T}(\rho_1) = \mathbf{e}_1, \mathcal{T}(\delta_1) = \mathbf{e}_2, \mathcal{T}(\gamma_1) = \mathbf{e}_3,$$

Más aún, para cualquier $\delta = \lambda_\delta \rho_1 + \kappa_\delta \delta_1 \in H_1$ y $\gamma = \lambda_\gamma \rho_1 + \mu_\gamma \gamma_1 \in H_2$ tenemos que

$$\mathcal{T}(\delta) = (\lambda_\delta, \kappa_\delta, 0) \text{ y } \mathcal{T}(\gamma) = (\lambda_\gamma, 0, \mu_\gamma)$$

Consideremos $\delta = \lambda_\delta \rho_1 + \kappa_\delta \delta_1$ y $\hat{\delta} = \lambda_{\hat{\delta}} \rho_1 + \kappa_{\hat{\delta}} \delta_1$ dos elementos en H_1 , luego $\lambda_\delta, \lambda_{\hat{\delta}} \in \mathbb{R}$ y $\kappa_\delta, \kappa_{\hat{\delta}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta) < \mathcal{L}(\hat{\delta}) &\Rightarrow \mathcal{L}_3(\delta) \leq \mathcal{L}_3(\hat{\delta}) \\ &\Rightarrow \kappa_\delta \mathcal{L}_3(\delta_1) \leq \kappa_{\hat{\delta}} \mathcal{L}_3(\delta_1) \\ &\Rightarrow \kappa_\delta \leq \kappa_{\hat{\delta}} \end{aligned}$$

Ahora observe que

- Si $\kappa_\delta < \kappa_{\hat{\delta}}$, entonces es directo que $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\delta)) < \mathcal{L}(\mathcal{T}(\hat{\delta}))$
- Si $\kappa_\delta = \kappa_{\hat{\delta}}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\delta) \leq \mathcal{L}_2(\hat{\delta}) &\Rightarrow \lambda_\delta \mathcal{L}_2(\rho_1) + \kappa_\delta \mathcal{L}_2(\delta_1) \leq \lambda_{\hat{\delta}} \mathcal{L}_2(\rho_1) + \kappa_{\hat{\delta}} \mathcal{L}_2(\delta_1) \\ &\Rightarrow \lambda_\delta \mathcal{L}_2(\rho_1) \leq \lambda_{\hat{\delta}} \mathcal{L}_2(\rho_1) \\ &\Rightarrow \lambda_\delta \leq \lambda_{\hat{\delta}}, \end{aligned}$$

En consecuencia $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\delta)) < \mathcal{L}(\mathcal{T}(\hat{\delta}))$. Lo anterior es análogo para ver que \mathcal{T} preserva los ordenes en H_2 . Esto termina la prueba del hecho. \square

HECHO 7. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales tal que existe un $\gamma_i \in \xi$ que satisface la condición 1. o 2. de (\star) . Entonces después de una cantidad finita de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se obtiene un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface el lema o las hipótesis del hecho anterior.*

DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Consideremos el elemento

$$\gamma_s = \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta_1 + \mu_{\gamma_s} \gamma_1$$

con el menor \mathcal{L} -valor que satisface la condición 1. o 2. de (\star) , luego $\lambda_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}$, $\kappa_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}_{<0}$ y $\mu_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}_{>0}$ o bien $\lambda_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}$, $\kappa_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $\mu_{\gamma_s} \in \mathbb{Z}_{<0}$.

Notemos que gráficamente γ_s se sitúa por arriba del plano H_1 y por debajo de plano H_2 . O bien se sitúa por abajo del plano generado por H_1 y por arriba de plano H_2 .

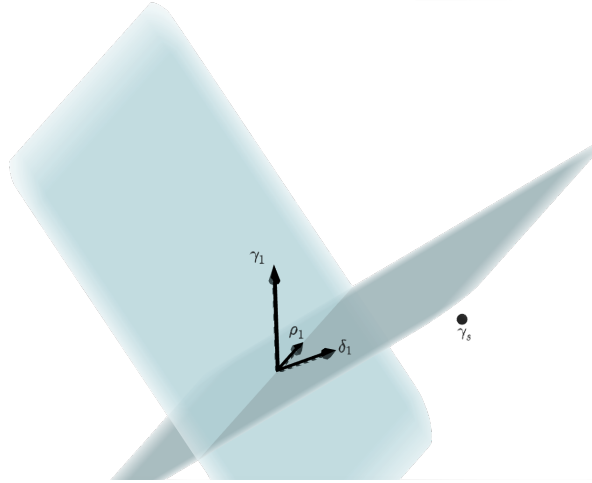


FIGURA 4. Representación gráfica de un elemento que satisfice la condición 2. de (\star)

Desde (3.9), sabemos que los elementos de ξ satisfacen el siguiente orden

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\delta_2) < \cdots < \mathcal{L}(\delta_t)$$

$$\mathcal{L}(\delta_1) < \mathcal{L}(\gamma_1) < \cdots < \mathcal{L}(\gamma_s) < \cdots < \mathcal{L}(\gamma_r)$$

Dado un elemento $\theta \in \xi$, entonces tenemos $\theta = \lambda_\theta \rho_1 + \kappa_\theta \delta_1 + \mu_\theta \gamma_1$. Sea

$$\xi_R = \{\theta \in \xi \mid \lambda_\theta \leq 0, \kappa_\theta \geq 0, \mu_\theta \geq 0\}.$$

De la definición de ξ_R se obtiene que:

$$\begin{aligned} \xi_R &\subsetneq \xi \\ \delta_j &\in \xi_R, 1 \leq j \leq t \\ \gamma_j &\in \xi_R, 1 \leq j \leq s-1 \end{aligned}$$

Sea ξ^1 el conjunto de exponentes monomiales obtenido al realizar una iteración del \mathcal{L} -algoritmo. Observe que los elementos de ξ_R solo generan elementos de $\xi_R^1 = \{\theta \in \xi^1 \mid \kappa_\theta \geq 0, \mu_\theta \geq 0\}$. En efecto, dado $\theta \in \xi_R$, entonces $\theta - \delta_1$ se genera si y solo si $\kappa_\theta \geq 1$, análogo para $\theta - \gamma_1$, este se genera si y solo si $\mu_\theta \geq 1$. De hecho, una iteración sobre el conjunto ξ_R se comporta como el conjunto de exponentes monomiales del Hecho 6.

Procedemos la demostración por inducción sobre $\mathcal{L}_3(\gamma_s)$. Si $\mathcal{L}_3(\gamma_s) = \mathcal{L}_3(\gamma_1)$, iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, se genera el elemento $\gamma_s - \gamma_1 = \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta_1 + (\mu_{\gamma_s} - 1) \gamma_1$ cuyo \mathcal{L}_3 -valor es cero y es linealmente independiente a ρ_1 , ya que $\kappa_{\gamma_s} \neq 0$ y $\mu_{\gamma_s} - 1 \neq 0$.

Supongamos que todo conjunto de exponentes monomiales ξ que contiene al menos un $\gamma_s \in \xi$ minimal con $\mathcal{L}_3(\gamma_s) < k$, satisfaciendo la condición 1. o 2. de (\star) , después de una cantidad finita de iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash se obtiene un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface el hecho. Lo verificaremos para $\mathcal{L}_3(\gamma_s) = k$.

Realizando una iteración del algoritmo, se generan los elementos

$$\begin{aligned} \gamma_s - \delta_1 &= \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + (\kappa_{\gamma_s} - 1) \delta_1 + \mu_{\gamma_s} \gamma_1. \\ \gamma_s - \gamma_1 &= \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta_1 + (\mu_{\gamma_s} - 1) \gamma_1. \end{aligned}$$

Si el cambio de \mathcal{L} -elección se genera a partir de elementos de ξ_R , entonces la terna $\Delta' = \{\rho'_1, \delta'_1, \gamma'_1\}$ tiene la forma:

1. $\rho'_1 = \rho_1$
2. $\delta'_1 = \lambda_{\delta'_1} \rho_1 + \delta_1$ donde $\lambda_{\delta'_1} \leq 0$

3. $\gamma'_1 = \lambda_{\gamma'_1} \rho_1 + \gamma_1$ donde $\lambda_{\gamma'_1} \leq 0$

luego $\mathcal{L}_3(\delta'_1) = \mathcal{L}_3(\delta_1)$ y $\mathcal{L}_3(\gamma'_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1)$. Además observe que

$$\gamma_s - \gamma_1 = \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta_1 + (\mu_{\gamma_s} - 1) \gamma_1 = \lambda'_{\gamma_s} \rho'_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta'_1 + (\mu_{\gamma_s} - 1) \gamma'_1$$

y

$$\mathcal{L}_3(\gamma_s - \gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_s).$$

Análogo para $\gamma_s - \delta_1$.

Luego se tiene que ξ^1 satisface las condiciones de la hipótesis inductiva. Entonces ξ satisface el hecho.

Supongamos que Δ' no se genera a partir de elementos de ξ_R . Entonces por el orden declarado en (3.9), la terna Δ' contiene al menos uno de los siguientes elementos

$$\gamma_s - \delta_1 = \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + (\kappa_{\gamma_s} - 1) \delta_1 + \mu_{\gamma_s} \gamma_1 \notin \xi_R.$$

$$\gamma_s - \gamma_1 = \lambda_{\gamma_s} \rho_1 + \kappa_{\gamma_s} \delta_1 + (\mu_{\gamma_s} - 1) \gamma_1 \notin \xi_R.$$

Notemos que la nueva \mathcal{L} -elección para ξ^1 define un nuevo conjunto ξ_R^1 tal que $\xi_R \subseteq \xi_R^1$. Si $\xi^1 = \xi_R^1$, nos encontraríamos en la hipótesis del Hecho 6, lo que termina la demostración. Supongamos que ξ^1 contiene al menos un γ'_s que satisface la condición 1. o 2. de (\star) . No necesariamente se tiene que $\mathcal{L}_3(\gamma'_s) < k$, sin embargo los \mathcal{L}_3 -valores de los elementos en la nueva \mathcal{L} -elección Δ' son menores respecto a los \mathcal{L}_3 -valores de la \mathcal{L} -elección anterior Δ , pues $\mathcal{L}_3(\gamma_s - \gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_s - \delta_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1)$. Lo que permite realizar un argumento por recurrencia.

Es decir, si realizamos una iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash a del conjunto de exponentes monomiales ξ se genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que satisface algunas de las siguientes condiciones:

- a) Existe una iteración tal que $\xi'_R = \xi'$. En cuyo caso se satisface las hipótesis de hecho 6, lo que termina la demostración.
- b) Para toda iteración de tiene que $\xi'_R \subsetneq \xi'$. Entonces existirá una iteración ξ' que contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor 0. En efecto, si suponemos que para toda iteración k , se tiene que $\xi_R^k \subsetneq \xi^k$, entonces siempre se reducirán los \mathcal{L}_3 -valores de la

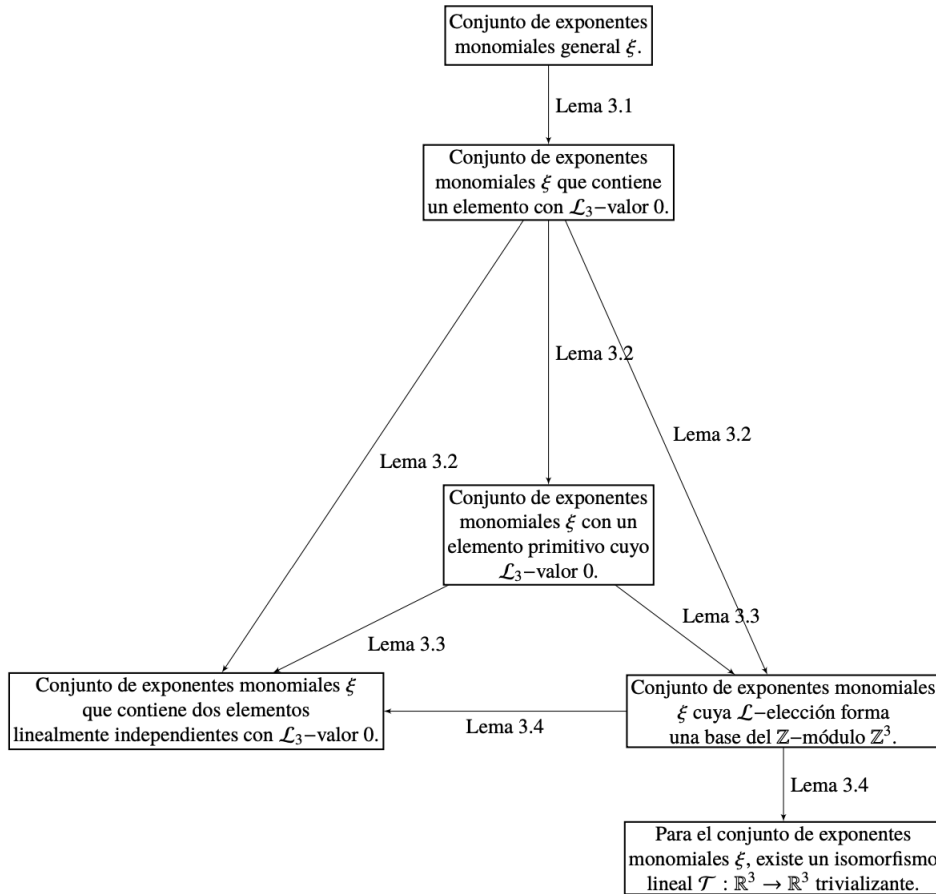
\mathcal{L} -elección Δ^k , como los \mathcal{L}_3 -valores son números enteros no negativos, se garantiza que eventualmente llegaremos a una iteración k_0 del \mathcal{L} -algoritmo, en donde la \mathcal{L} -elección para el conjunto ξ^{k_0} incluirá dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L}_3 -valor igual a 0.

□

El lema sigue de los hechos anteriores.

□

En virtud de los Lemas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4, podemos suponer que el conjunto de exponentes monomiales ξ contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L} -valor 0, o bien para ξ existe un isomorfismo trivializante. Tal y como lo describe el siguiente diagrama.



Si para ξ existe un isomorfismo trivializante $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, por Definición 3.1 se tiene que $\mathcal{T}(\xi)$ tiene dos elementos linealmente independientes con

\mathcal{L} -valor 0 y un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1.

Si ξ es un conjunto de exponentes monomiales que contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L} -valor 0, entonces ξ tiene la forma

$$\xi = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \dots, \rho_s, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}; \quad r > 1 \quad (3.10)$$

donde

- $\mathcal{L}_3(\rho_i) = 0$ para $1 \leq i \leq s$
- $\mathcal{L}_3(\gamma_j) > 0$ para $1 \leq j \leq r$
- Supongamos que el orden inducido por \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\rho_2) < \dots < \mathcal{L}(\rho_l) < \dots < \mathcal{L}(\rho_s) < \mathcal{L}(\gamma_1) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r) \quad (3.11)$$

- ρ_l es el elemento con menor \mathcal{L} -valor que es linealmente independiente a ρ_1 .

En el siguiente lema se demostrará que dado un conjunto ξ de la forma descrita en 3.10, entonces la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' , que contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L} -valor 0 y un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1.

LEMA 3.5. Dado un conjunto ξ de exponentes monomiales esencial de la forma descrita en 3,10, entonces la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ' , que contiene dos elementos linealmente independientes con \mathcal{L} -valor 0 y al menos un elemento cuyo \mathcal{L}_3 -valor es 1.

DEMOSTRACIÓN.

Dado un conjunto de exponentes monomiales de la forma descrita en 3.10, se tiene que la \mathcal{L} -elección para ξ es la terna $\Delta = \{\rho_1, \rho_l, \gamma_1\}$.

Consideremos en ξ los siguientes conjuntos disjuntos:

- $\xi_0 = \{\rho_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ compuesto por todos los elementos de ξ cuyo \mathcal{L}_3 -valor es cero.

- $\xi_c = \{\gamma_j \mid 1 \leq j \leq r\}$ compuesto de todos los elementos de ξ cuyo \mathcal{L}_3 -valor es mayor a cero.

Observemos que la equivalencia $\mathbb{Z}\xi = \mathbb{Z}^3$, implica que el máximo común divisor de los \mathcal{L}_3 -valores de ξ_c es 1. En otras palabras, si $\gamma_j = (a_j, b_j, c_j)$ para todo $1 \leq j \leq r$, entonces

$$\text{mcd}(c_1, c_2, \dots, c_r) = 1$$

ya que se debe generar el elemento $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Notemos que cada γ_j con $1 < j \leq r$ se puede expresar de la forma

$$\gamma_j = \lambda_j \rho_1 + \kappa_j \rho_l + \mu_j \gamma_1$$

donde $\lambda_j, \kappa_j \in \mathbb{Q}$ y $\mu_j \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$, por Observación 5 y 6 tenemos que en una iteración del \mathcal{L} -algoritmo, cada γ_j genera el elemento $\gamma_j - \gamma_1$, con $\mathcal{L}_3(\gamma_j - \gamma_1) = c_j - c_1$.

Por otro lado, por propiedad del máximo común divisor, se tiene que los \mathcal{L}_3 -valores no nulos de ξ^1 también debe ser 1. Es decir:

$$\text{mcd}(c_1, c_2 - c_1, \dots, c_r - c_1) = 1$$

Por la forma del conjunto ξ declarada en 3.11, y en vista que la \mathcal{L} -elección debe ser linealmente independiente, todos los elementos generados por ρ_i ($i \neq 1, l$) en iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, tiene \mathcal{L}_3 -valor 0 y solo podrían sustituir en la \mathcal{L} -elección a ρ_1, ρ_l o ambos, pero no al vector γ_1 , por otro lado, los elementos generados por γ_j ($j \neq 1$), podrían sustituir en la \mathcal{L} -elección a γ_1 .

El Principio de Iteración 1 y la Observación 7 indican que cualquier cambio en la \mathcal{L} -elección Δ de los elementos ρ_1 o ρ_l , resulta irrelevante para la demostración, ya que en el peor de los casos, el conjunto generado mantiene las mismas propiedades que el conjunto original ξ . Desde ahora solamente nos preocuparemos de los casos donde el vector $\gamma_1 \in \Delta$ es sustituido.

Notemos que el \mathcal{L} -orden sugiere que el elemento γ_2 es el primer candidato en sustituir en la \mathcal{L} -elección a γ_1 . Podemos iterar el \mathcal{L} -algoritmo, hasta encontrar un $k_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$\mathcal{L}_3(\gamma_2 - (k_1 - 1)\gamma_1) > \mathcal{L}_3(\gamma_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_3(\gamma_2 - k_1\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$$

Si $\mathcal{L}_3(\gamma_2 - k_1\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1)$, significa que $\mathcal{L}_3(\gamma_2)$ es múltiplo de $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$. En este momento el elemento $\gamma_2 - k_1\gamma_1$ podría reemplazar a γ_1 en la \mathcal{L} -elección para ξ^{k_1} . Considerando que estamos interesados en su \mathcal{L}_3 -valor, por abuso de notación, seguiremos denotando por γ_1 el vector perteneciente a la \mathcal{L} -elección cuyo \mathcal{L}_3 -valor es mayor que 0 (ver Observación 7).

Por el Principio de Iteración 1, seguimos iterando el \mathcal{L} -algoritmo hasta algún $k_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ talque:

$$\mathcal{L}_3(\gamma_3 - (k_2 - 1)\gamma_1) > \mathcal{L}_3(\gamma_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_3(\gamma_3 - k_2\gamma_1) \leq \mathcal{L}_3(\gamma_1)$$

si $\mathcal{L}_3(\gamma_3 - k_2\gamma_1) = \mathcal{L}_3(\gamma_1)$ significa que también $\mathcal{L}_3(\gamma_3)$ es múltiplo de $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$.

Notemos que no todos los \mathcal{L}_3 -valores pueden ser múltiplos de $\mathcal{L}_3(\gamma_1)$, pues $\text{mcd}(c_1, c_2, \dots, c_r) = 1$, entonces existe un elemento $\gamma' \in \xi_c$ minimal respecto al orden inducido por \mathcal{L} , tal que:

$$\mathcal{L}_3(\gamma' - k\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1)$$

De esta manera, obtenemos un nuevo conjunto de exponentes monomiales ξ^k tal que el máximo común divisor de los \mathcal{L}_3 -valores no nulos es igual a 1 y con un elemento de la forma $\gamma - k\gamma_1$ con $0 < \mathcal{L}_3(\gamma - k\gamma_1) < \mathcal{L}_3(\gamma_1)$. Es decir, nos encontramos en la misma condición inicial, pero con una mejora en la \mathcal{L} -elección respecto a sus \mathcal{L}_3 -valores. Un argumento de recurrencia sobre el \mathcal{L}_3 -valor de $\gamma' - k\gamma_1$ nos permite concluir que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un elemento con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1. \square

OBSERVACIÓN 9. *El elemento $\gamma - k\gamma_1$ con \mathcal{L}_3 -valor igual a 1, determinado en el Lema 3.5, puede asumirse como \mathbf{e}_3 , en efecto si $\gamma - k\gamma_1$ tiene la forma $(a, b, 1)$ y es minimal respecto al orden inducido por \mathcal{L} . Aplicando el isomorfismo lineal $T(x, y, z) = (x - az, y - bz, z)$, obtenemos $T(a, b, 1) = (0, 0, 1)$. Por lo tanto, podemos suponer que el conjunto de exponentes monomiales inicial ξ contiene a \mathbf{e}_3 y dos elementos linealmente independiente con \mathcal{L}_3 -valor 0.*

Notemos que para caso donde ξ admite un isomorfismo trivializante, se tiene que $\mathcal{T}(\xi)$ contiene a \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 , lo que es un caso particular del resultado obtenido en el Lema 3.5.

Desde ahora, podemos suponer que el conjunto de exponentes monomiales inicial ξ tiene la forma

$$\xi = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \gamma_1 = \mathbf{e}_3, \gamma_2, \dots, \gamma_r\} \quad (3.12)$$

donde

- $\mathcal{L}_3(\rho_i) = 0$ para $1 \leq i \leq s$
- $\mathcal{L}_3(\gamma_j) \geq 1$ para $1 \leq j \leq r$,
- el orden en ξ inducido por \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}(\rho_1) < \mathcal{L}(\rho_2) < \dots < \mathcal{L}(\rho_l) < \dots < \mathcal{L}(\rho_s) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) < \mathcal{L}(\gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\gamma_r)$$

- ρ_l es el elemento con menor \mathcal{L} -valor que es linealmente independiente a ρ_1 .

LEMA 3.6. *Sea ξ un conjunto de exponentes monomiales de la forma 3.12, entonces la iteración del \mathcal{L} -algoritmo genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' tal que $\mathbb{Z}\xi'_0 = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}$, donde $\xi'_0 := \{\rho \in \xi' \mid \mathcal{L}_3(\rho) = 0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la descripción de ξ dada en 3.12, tenemos que la \mathcal{L} -elección es la terna $\Delta = \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3\}$.

Si $\mathbb{Z}\xi_0 = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ no hay necesidad de realizar ninguna demostración. Ahora, supongamos que $\mathbb{Z}\xi_0 \neq \mathbb{Z}^2 \times \{0\}$. En este caso, dado que $\mathbb{Z}\xi = \mathbb{Z}^3$ existe un subconjunto $\zeta \subseteq \xi$ tal que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}\zeta$.

Digamos que el conjunto ζ tiene la forma $\zeta = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t\}$ y que el orden inducido por \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(\sigma_1) < \mathcal{L}(\sigma_2) < \dots < \mathcal{L}(\sigma_t) \quad (3.13)$$

Demostremos el lema por principio de inducción sobre el $\mathcal{L}_3(\sigma_t)$.

Si $\mathcal{L}_3(\sigma_t) = 1$, existe un entero $1 \leq j \leq t$, tal que $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = 0$ para todo $i < j$ y $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = 1$ para todo $i \geq j$, iterando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, cada σ_i genera los siguientes elementos:

- $\sigma_i - \rho_1$ para todo $1 \leq i \leq t$.
- $\sigma_i - \rho_l$ para todo $1 \leq i \leq t$.
- $\sigma_i - \mathbf{e}_3$ para todo $i \geq j$.

Notemos que el subconjunto

$$\{\rho_1, \sigma_i - \rho_1, \sigma_h - \mathbf{e}_3 \mid 1 \leq i < j, h \geq j\} \subseteq \xi_0^1$$

mantiene toda la información de las componentes 1 y 2 de todos los elementos $\sigma_i \in \zeta$. Por lo tanto es directo que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}\zeta_0^1$, lo que implica la igualdad.

Supongamos que todo conjunto de exponentes monomiales ξ que contiene un subconjunto ζ tal que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}\zeta$ con $\mathcal{L}_3(\sigma_t) < k$ satisface el lema, lo verificaremos para $\mathcal{L}_3(\sigma_t) = k$.

Para usar la hipótesis de inducción se debe verificar que el conjunto de exponentes generado satisface las mismas características del conjunto inicial ξ , es decir, su \mathcal{L} -elección contiene 2 elementos linealmente independientes con \mathcal{L} -valor 0 y al vector canónico \mathbf{e}_3 , notemos que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo en el peor de los casos mantiene los \mathcal{L}_3 -valores de los elementos de ξ^1 respecto a los de ξ .

Consideremos el conjunto de exponentes monomiales ξ con \mathcal{L} -elección $\Delta = \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3\}$ y el subconjunto $\zeta = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t\}$ tal que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}\zeta$.

Por el \mathcal{L} -orden en ζ descrito en 3.13, existen enteros j_1, j_2, j_3 y j_4 tales que:

- $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq j_1$.
- $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = 1$ para todo $j_1 < i \leq j_2$.
- $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = 2$ para todo $j_2 < i \leq j_3$.
- $2 < \mathcal{L}_3(\sigma_i) < k$ para todo $j_3 < i \leq j_4$.
- $\mathcal{L}_3(\sigma_i) = k$ para todo $j_4 < i \leq t$.

Aplicando una vez el \mathcal{L} -algoritmo, cada $\sigma_i \in \zeta \setminus \Delta$ genera los elementos

- $\sigma_i - \rho_1$ para $1 \leq i \leq t$.
- $\sigma_i - \rho_l$ para $1 \leq i \leq t$.
- $\sigma_i - \mathbf{e}_3$ para todo $i > j_1$.

Considerando que al restar \mathbf{e}_3 , solo se altera la tercera coordenada, la iteración del algoritmo permite conservar toda la información de las coordenadas 1 y 2 de los elementos σ_i con $i > j_1$. Entonces si no hay cambio en la \mathcal{L} -elección, podemos considerar el subconjunto

$$\zeta^1 = \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3, \sigma_i - \rho_1 \text{ (con } 1 \leq i \leq j_4), \sigma_i - \mathbf{e}_3 \text{ (con } j_4 < i \leq t) \mid \sigma_i \in \zeta \setminus \Delta\} \subset \xi^1$$

notemos que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}\zeta^1$ y como todo elemento en ζ^1 tiene \mathcal{L}_3 -valor menor que k , la hipótesis de inducción permite concluir el lema.

Por otro lado, si para la próxima iteración hay cambios en la \mathcal{L} -elección, significa que:

- i. Algún elemento de la forma $\sigma_i - \mathbf{e}_3$ con $j_1 < i \leq j_2$, $\sigma_i - \rho_1$ o $\sigma_i - \rho_l$ con $i \leq j_1$ reemplaza a ρ_1 o ρ_l o ambos.
- ii. Algún elementos de la forma $\sigma_i - \mathbf{e}_3$ con $j_2 < i \leq j_3$, $\sigma_i - \rho_1$ o $\sigma_i - \rho_l$ con $j_1 < i \leq j_2$ reemplaza a \mathbf{e}_3 .
- iii. Ocurren i. y ii. simultáneamente.

Supongamos que para el caso i. la nueva \mathcal{L} -elección sustituye a ρ_l , entonces el mismo conjunto

$$\zeta^1 = \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3, \sigma_i - \rho_1 \text{ (con } 1 \leq i \leq j_4), \sigma_i - \mathbf{e}_3 \text{ (con } j_4 < i \leq t) \mid \sigma_i \in \zeta \setminus \Delta\} \subset \xi^1$$

como todo elemento en ζ^1 tiene \mathcal{L}_3 -valor menor que k , la hipótesis inductiva permite concluir que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} = \mathbb{Z}\zeta_0^1$. Por otro lado, si la nueva \mathcal{L} -elección sustituye a ρ_1 , entonces se puede considerar el conjunto

$$\zeta^2 = \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3, \sigma_i - \rho_l \text{ (con } 1 \leq i \leq j_4), \sigma_i - \mathbf{e}_3 \text{ (con } j_4 < i \leq t) \mid \sigma_i \in \zeta \setminus \Delta\} \subset \xi^1$$

como todo elemento en ζ^2 tiene \mathcal{L}_3 -valor menor que k , por hipótesis inductiva podemos concluir que $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} = \mathbb{Z}\zeta_0^1$. Por último, si la nueva \mathcal{L} -elección sustituye a ρ_1 y ρ_l . Digamos que $\sigma_{i_0} - \gamma$ es un vector en la terna Δ' , con $1 \leq i_0 \leq j_2$, $\gamma \in \{\rho_1, \rho_l, \mathbf{e}_3\}$, entonces en la próxima iteración del \mathcal{L} -algoritmo el conjunto ξ^2 , entre otros, contiene a los elementos

- $\sigma_{i_0} - \gamma$.
- $\rho_1 - (\sigma_{i_0} - \gamma)$.

- $\rho_l - (\sigma_{i_0} - \gamma)$.
- $\sigma_i - \rho_1 - (\sigma_{i_0} - \gamma)$ para $1 \leq i \leq t$, $i \neq i_0$.
- $\sigma_i - \mathbf{e}_3 - (\sigma_{i_0} - \gamma)$ para $j_1 < i \leq t$, $i \neq i_0$.
- $\sigma_i - 2\mathbf{e}_3$ para $j_2 < i \leq t$.

consideramos el subconjunto ζ^3 que contiene los siguientes elementos de ξ^2 :

- $\sigma_{i_0} - \gamma$.
- $\rho_1 - (\sigma_{i_0} - \gamma)$.
- $\rho_l - (\sigma_{i_0} - \gamma)$.
- $\sigma_i - \rho_1 - (\sigma_{i_0} - \gamma)$ para $(1 \leq i \leq j_2, i \neq i_0)$.
- $\sigma_i - 2\mathbf{e}_3$ para $(j_2 < i \leq t)$

luego, al igual que antes, el subconjunto ζ^3 tiene toda la información de las coordenadas 1 y 2 de todos los $\sigma_i \in \zeta$, y como los elementos de ζ^3 tiene \mathcal{L}_3 -valor menor que k , la hipótesis de inducción permite concluir el lema para el caso i.

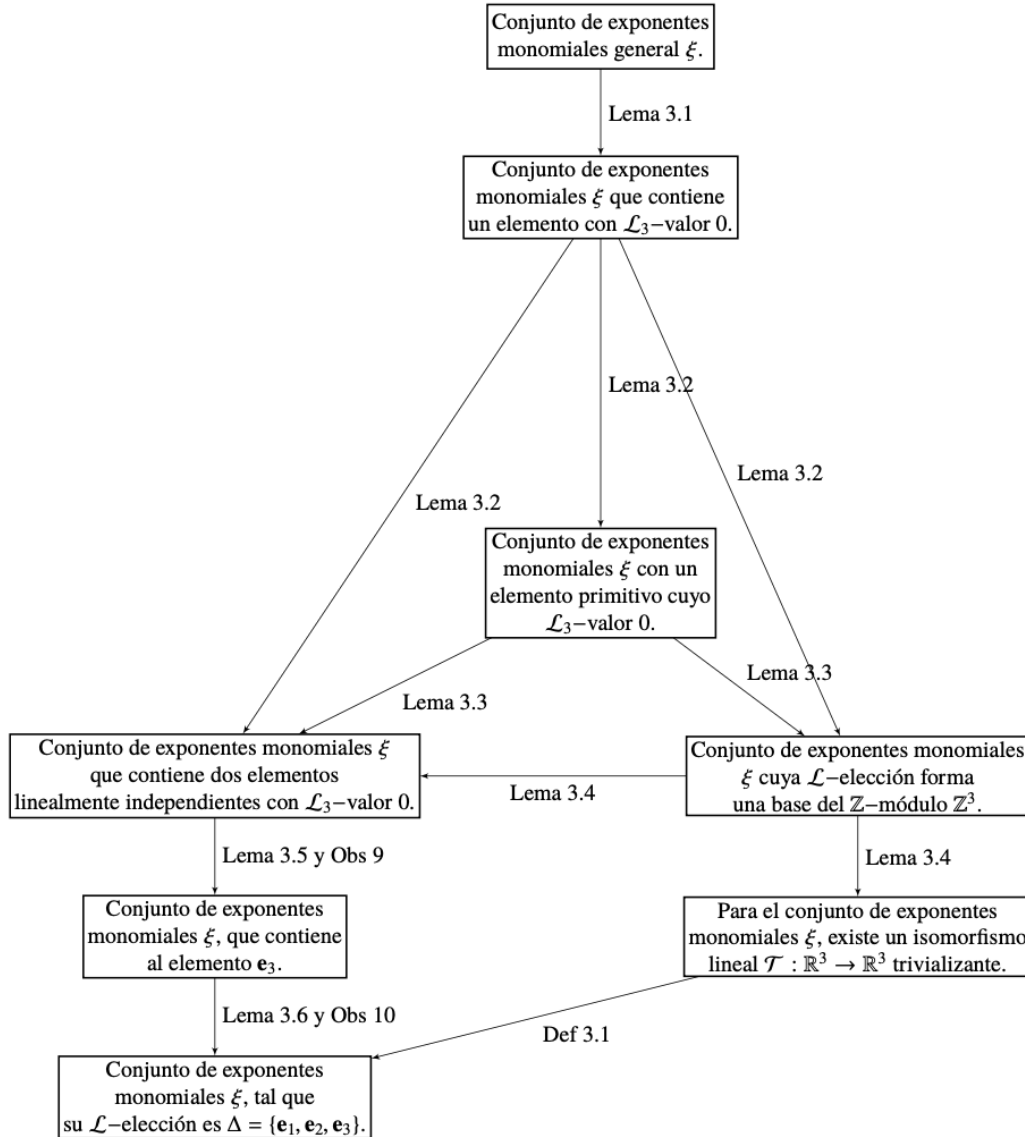
Para el caso ii. y iii. el resultado es directo, ya que si se debe sustituir \mathbf{e}_3 , podemos aplicar el isomorfismo lineal definido en la observación 9 el cual permite recuperar en la \mathcal{L} -elección a \mathbf{e}_3 y además T fija los elementos en $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$, esto significa que los cambios en la \mathcal{L} -elección de los elementos de \mathcal{L} -valor 0 son los críticos, pero esto ya se analizó en el caso i. Luego $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} = \mathbb{Z}T(\zeta)$. Lo que termina la demostración del lema

□

OBSERVACIÓN 10. Según el Lema 3.6, dado un conjunto de exponentes monomiales ξ asociado a alguna variedad tórica, podemos asumir que el subconjunto ξ_0 compuesto por todos los elementos de ξ con \mathcal{L}_3 -valor 0, genera $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$. Por otro lado, en el trabajo de Duarte [5] se demuestra en los Lemmas 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8, que todo conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $\xi\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, la iteración del algoritmo de Nash fijando una recta L de pendiente racional, conduce a un conjunto de exponentes monomiales esencial ξ' que contiene los elementos canónicos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Recordemos de la Observación 4, que las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, para el caso bidimensional son un caso particular del \mathcal{L} -algoritmo de

Nash, luego podemos suponer que el conjunto inicial de exponentes monomiales $\xi \subset \mathbb{Z}^3$ contiene los elementos canónicos \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 y gracias a la observación 9 también contiene a \mathbf{e}_3 . Además la \mathcal{L} -elección para ξ es $\Delta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. El avance de la demostración se representa el siguiente esquema.



OBSERVACIÓN 11. Notemos que, para un conjunto de exponentes monomiales ξ con \mathcal{L} -elección canónica $\Delta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, una iteración del \mathcal{L} -algoritmo

de Nash resta a lo más una unidad a las coordenadas de $\gamma \in \xi \setminus \Delta$. En otras palabras, si $\gamma = (a_1, a_2, a_3) \in \xi \setminus \Delta$ después de k iteraciones, en ξ^k tendremos elementos de la forma: $(a_1 - k_1, a_2 - k_2, a_3 - k_3)$, donde las constantes enteras no negativas k_1, k_2, k_3 representan combinaciones cuya suma es k .

OBSERVACIÓN 12. Consideremos un conjunto minimal de exponentes monomiales ξ cuya \mathcal{L} -elección corresponde a la terna canónica $\Delta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y sea $\gamma \in \xi$. En este caso podemos actualizar lo visto en las Observaciones 5 y 6.

Si $\gamma \in \xi$, recordemos que en la siguiente iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash, se generan los elementos de la forma:

- $\gamma - \mathbf{e}_1 \in \xi^1$ si y solo si $\det(\gamma, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0$.
- $\gamma - \mathbf{e}_2 \in \xi^1$ si y solo si $\det(\gamma, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \neq 0$.
- $\gamma - \mathbf{e}_3 \in \xi^1$ si y solo si $\det(\gamma, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \neq 0$.

En particular, si $\gamma = (a_1, 0, a_3) \in \xi$, entonces en la siguiente iteración del \mathcal{L} -algoritmo se generan los elementos de la forma $\gamma - \mathbf{e}_1$ y $\gamma - \mathbf{e}_3 \in \xi^1$. Pero no se genera el elemento $\gamma - \mathbf{e}_2$, pues $\det(\mathbf{e}_1, \gamma, \mathbf{e}_3) = 0$. Análogamente, si $\gamma = (a_1, a_2, 0) \in \xi$, entonces en la siguiente iteración del \mathcal{L} -algoritmo se generan solo los elementos de la forma $\gamma - \mathbf{e}_1$ y $\gamma - \mathbf{e}_2$.

Por lo tanto, dado un elemento $\gamma \in \xi$, concluimos que la progresión definida por la iteración del \mathcal{L} -algoritmo con \mathcal{L} -elección canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, no genera elementos fuera del octante al que pertenece γ .

LEMA 3.7. Consideremos un conjunto de exponentes monomiales de alguna variedad tórica esencial de dimensión 3. Entonces la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' que contiene un único elemento cuyo \mathcal{L}_3 -valor es distinto de 0.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación 10, podemos suponer que ξ tiene la forma

$$\xi = \left\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, (d_i, f_i, 0), (a_j, b_j, c_j); 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \right\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (3.14)$$

donde, por minimalidad y esencialidad se tiene que:

- $c_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq s$,
- $d_i < 0$ y $f_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq r$,
- la \mathcal{L} -elección es la terna canónica $\Delta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

- digamos que el orden inducido por \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) < \mathcal{L}((d_1, f_1, 0)) < \cdots < \mathcal{L}((d_r, f_r, 0)) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_1) < \mathcal{L}((a_1, b_1, c_1)) < \cdots < \mathcal{L}((a_s, b_s, c_s))$$

luego $0 < f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_r$ y $0 < c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_s$.

Consideremos el par $\mathcal{R}(\xi) := (a_{j_N}, b_{j_M})$, donde

$$a_{j_N} = \text{mín}\{a_j \mid 1 \leq j \leq s\}$$

$$b_{j_M} = \text{mín}\{b_j \mid 1 \leq j \leq s\}$$

demostraremos que iterando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash, obtenemos un conjunto de exponentes monomiales ξ' de modo que $\mathcal{R}(\xi') = (0, 0)$, luego por la minimalidad del conjunto ξ' , $s = 0$ y en consecuencia, el único elemento con \mathcal{L}_3 -valor mayor a cero sería \mathbf{e}_3 .

HECHO 8. *Dado un conjunto de exponentes monomiales de la forma descrita en 3.14, entonces podemos suponer que todo elemento de la forma (a_j, b_j, c_j) , satisface que $b_j > 0$.*

DEMOSTRACIÓN DEL HECHO. Por principio de iteración 1, supondremos que no satisface el lema en iteraciones previas.

Por la Observación 11 los elementos del conjunto ξ^k generado en la k -ésima iteración del \mathcal{L} -algoritmo siguiendo la elección canónica $\Delta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tienen la forma:

- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $(d_i - k_1, f_i - k_2, 0)$ para $k_1, k_2 \geq 0$ tales que $k_1 + k_2 = k$.
- $\mathbf{e}_3, (a_j - k_3, b_j - k_4, c_j - k_5)$ para $k_3, k_4, k_5 \geq 0$ tales que $k_3 + k_4 + k_5 = k$.

Notemos que para ξ^k podría haber un cambio en la \mathcal{L} -elección si, y solo si, se presenta alguno de los siguientes casos:

- C1 Después de $k = f_1 - 1$ iteraciones se genera el elemento $(d_1, 1, 0)$ con $d_1 < 0$, el cual reemplazará a \mathbf{e}_2 en la \mathcal{L} -elección para ξ^k .
- C2 Después de $k = b_{j_0} + c_{j_0} - 1$, iteraciones, donde $b_{j_0} + c_{j_0} = \text{mín}\{b_j + c_j; b_j \geq 0\}$, se generan los elementos $(a_{j_0}, 1, 0)$ y $(a_{j_0}, 0, 1)$ los cuales en la siguiente \mathcal{L} -elección reemplazarán a \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 respectivamente.

C3 Después de $k = c_{j_1} - 1$ iteraciones, donde $c_{j_1} = \min\{c_j; b_j < 0\}$ se genera el elemento $(a_{j_1}, b_{j_1}, 1)$ el cual en la siguiente \mathcal{L} -elección reemplazará a \mathbf{e}_3 .

En primer lugar demostraremos que podemos iterar el \mathcal{L} -algoritmo de Nash $k = c_{j_1} - 1$ veces hasta que ocurra el caso 3.

$$\text{Sea } k = \min\{f_1 - 1, b_{j_0} + c_{j_0} - 1, c_{j_1} - 1\}$$

Si $k = c_{j_1} - 1$, no hay nada que demostrar.

Si $k = f_1 - 1$, al paso de k iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, obtenemos el conjunto de exponentes monomiales ξ^{f_1-1} , observemos que $(d_1, 1, 0) \in \xi^{f_1-1}$, además $\mathcal{L}((d_1, 1, 0)) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$, luego hay un cambio en la \mathcal{L} -elección. Aplicando la transformación lineal:

$$\mathbf{T}_1(x, y, z) = (x + |d_1|y, y, z) \tag{3.15}$$

recuperamos una \mathcal{L} -elección canónica y además el conjunto $\zeta^{f_1-1} := \mathbf{T}_1(\xi^{f_1-1})$ tiene la forma descrita en 3.14.

Si $k = b_{j_0} + c_{j_0} - 1$ donde $b_{j_0} + c_{j_0} = \min\{b_j + c_j; b_j \geq 0\}$, después de k iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, obtenemos el conjunto $\xi^{b_{j_0}+c_{j_0}-1}$, observemos que $(a_{j_0}, 1, 0)$ y $(a_{j_0}, 0, 1) \in \xi^{b_{j_0}+c_{j_0}-1}$, tales que $\mathcal{L}((a_{j_0}, 1, 0)) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_2)$ y $\mathcal{L}((a_{j_0}, 0, 1)) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_3)$, luego hay un cambio en la \mathcal{L} -elección. Aplicando la transformación lineal:

$$\mathbf{T}_2(x, y, z) = (x + |a_{j_0}|(y + z), y, z) \tag{3.16}$$

recuperamos una \mathcal{L} -elección canónica, además el conjunto $\mathbf{T}_2(\xi^{b_{j_0}+c_{j_0}-1})$ tiene la forma descrita en 3.14.

Notemos que, por definición de \mathbf{T}_1 se tiene que $\mathcal{L}_2(\gamma) = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}_1(\gamma))$ y $\mathcal{L}_3(\gamma) = \mathcal{L}_3(\mathbf{T}_1(\gamma))$, análogamente para \mathbf{T}_2 . Por lo tanto, cualquier composición de los isomorfismos \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 mantendrá fijo los \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_3 valores y generará un conjunto de la forma descrita en 3.14. Luego podemos iterar el \mathcal{L} -algoritmo $k =$

$c_{j_1} - 1$ veces, hasta que ocurra el caso 3.

Digamos que $(a_{j_M}, b_{j_M}, c_{j_M}) \in \xi$ es el elemento con \mathcal{L}_2 -valor más negativo, y apliquemos el \mathcal{L} -algoritmo $c_{j_1} - 1$ veces, donde $c_{j_1} = \min\{c_j; b_j < 0\}$, hasta generar el conjunto $\xi^{c_{j_1}-1}$.

Por Observación 11 tenemos que el elemento en $\xi^{c_{j_1}-1}$ con \mathcal{L}_2 -valor más negativo tiene la forma $(a_{j_M}, b_{j_M} - (c_{j_1} - 1), c_{j_M})$. Además $(a_{j_1}, b_{j_1}, 1) \in \xi^{c_{j_1}-1}$ y $\mathcal{L}((a_{j_1}, b_{j_1}, 1)) < \mathcal{L}(\mathbf{e}_3)$, por lo tanto hay un cambio en la \mathcal{L} -elección. Mediante la transformación lineal:

$$\mathbf{T}_3(x, y, z) = (x + |a_{j_1}|z, y + |b_{j_1}|z, z) \quad (3.17)$$

recuperamos una \mathcal{L} -elección canónica para $\mathbf{T}_3(\xi^{c_{j_1}-1})$.

En particular, analizando el elemento de $\xi^{c_{j_1}-1}$ con \mathcal{L}_2 -valor más negativo tenemos:

$$\mathbf{T}_3(a_{j_M}, b_{j_M} - (c_{j_1}-1), c_{j_M}) = \left(a_{j_M} + |a_{j_1}|c_{j_M}, \underbrace{b_{j_M} - (c_{j_1}-1) + |b_{j_1}|c_{j_M}}_{>0}, c_{j_M} \right)$$

En efecto, $|b_{j_1}|c_{j_M} > (c_{j_1}-1)$ pues

$$\begin{aligned} c_{j_1} - 1 &< c_{j_1} \\ &\leq c_j \text{ ; para todo } j \text{ con } b_j < 0 \\ &\leq c_{j_M} \\ &\leq \underbrace{|b_{j_1}|}_{\geq 1} c_{j_M} \end{aligned}$$

Dado que $b_{j_M} < 0$, se prueba que después de $c_{j_1} - 1$ iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo, la segunda coordenada del par $\mathcal{R}(\xi^{c_{j_1}-1})$ es mayor a la segunda coordenada del par $\mathcal{R}(\xi)$.

Por un argumento de recurrencia, desde ahora podemos suponer que todo elemento (a_j, b_j, c_j) en el conjunto de exponentes monomiales ξ de la forma 3.14 satisface que $b_j > 0$.

□

Entonces, considerando un conjunto ξ de la forma descrita 3.14, en virtud del Hecho 8 se tiene que cada elemento de la forma (a_j, b_j, c_j) satisface que $c_j > 0$ y $b_j > 0$, luego por minimalidad del conjunto ξ se tiene que $a_j < 0$.

Entonces $\mathcal{R}(\xi) = \left(\underbrace{a_{j_N}}_{<0}, \underbrace{b_{j_M}}_{>0} \right)$. Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash genera un conjunto de exponentes monomiales ξ' tal que $\mathcal{R}(\xi') = (0, 0)$.

Notemos que iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash mantienen la \mathcal{L} -elección canónica Δ hasta que se presente el caso C1 o bien el caso C2 definidos anteriormente, el caso C3 ya no ocurrirá, pues cada elemento $(a_j, b_j, c_j) \in \xi$ satisface que $b_j > 0$. Además la Observación 12 indica que nunca generaremos un elemento (a'_j, b'_j, c'_j) con $c'_j > 0$ y $b'_j < 0$.

El efecto de las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash sobre los valores a_{j_N} y b_{j_M} , es conocido por la Observación 11, en efecto, después de k iteraciones se tiene que

$$\mathcal{R}(\xi^k) = (a_{j_N} - k, b_{j_M} - k)$$

Sea $k = \min\{f_1 - 1, b_{j_0} + c_{j_0} - 1\}$, estudiaremos el efecto de las transformaciones \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 sobre los valores a_{j_N} y b_{j_M} .

Si $k = f_1 - 1$, por definición de \mathbf{T}_1 (ver 3.15), se tiene que el conjunto monomial ξ^{f_1-1} contiene los elementos $(a_{j_N} - (f_1 - 1), b_{j_N}, c_{j_N})$ y $(a_{j_M}, b_{j_M} - (f_1 - 1), c_{j_M})$, quienes definen al par $\mathcal{R}(\xi^{f_1-1}) = (a_{j_N} - (f_1 - 1), b_{j_M} - (f_1 - 1))$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{T}_1(a_{j_M}, b_{j_M} - (f_1 - 1), c_{j_M}) &= \left(a_{j_M} + |d_1| (b_{j_M} - (f_1 - 1)), \underbrace{b_{j_M} - (f_1 - 1)}_{< b_{j_M}}, c_{j_M} \right) \\ \bullet \mathbf{T}_1(a_{j_N} - (f_1 - 1), b_{j_N}, c_{j_N}) &= \left(\underbrace{a_{j_N} - (f_1 - 1) + |d_1| b_{j_N}}_{> a_{j_N} - (f_1 - 1)}, \underbrace{b_{j_N}}_{\geq 0}, c_{j_N} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{R}\left(\mathbf{T}_1\left(\xi^{f_1-1}\right)\right)$ está mas cercano a $(0,0)$ en comparación de $\mathcal{R}(\xi)$.

De forma análoga, si $k = b_{j_0} + c_{j_0} - 1$, por definición de \mathbf{T}_2 (ver 3.16), se tiene que el conjunto $\xi^{b_{j_0} + c_{j_0} - 1}$ contiene los elementos $(a_{j_N} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1), b_{j_N}, c_{j_N})$ y $(a_{j_M}, b_{j_M} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1), c_{j_M})$, quienes definen al par

$$\mathcal{R}\left(\xi^{b_{j_0} + c_{j_0} - 1}\right) = \left(a_{j_N} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1), b_{j_M} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1)\right).$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} & \blacksquare \mathbf{T}_2\left(a_{j_M}, b_{j_M} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1), c_{j_M}\right) \\ &= \left(a_{j_M} + |a_{j_0}| \left(b_{j_M} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1) + c_{j_M}\right), \underbrace{b_{j_M} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1)}_{< b_{j_M}}, c_{j_M}\right) \\ & \blacksquare \mathbf{T}_2\left(a_{j_N} - (b_{j_0} + c_{j_0} - 1), b_{j_N}, c_{j_N}\right) = \left(a_{j_N} - \underbrace{(b_{j_0} + c_{j_0} - 1) + |a_{j_0}|(b_{j_N} + c_{j_N})}_{> 0}, b_{j_N}, c_{j_N}\right). \end{aligned}$$

Efectivamente $|a_{j_0}|(b_{j_N} + c_{j_N}) > (b_{j_0} + c_{j_0} - 1)$ pues

$$\begin{aligned} b_{j_0} + c_{j_0} - 1 &< b_{j_0} + c_{j_0} \\ &\leq b_j + c_j ; \text{ para todo } j \text{ en particular para } j = j_N \\ &\leq b_{j_N} + c_{j_N} \\ &\leq \underbrace{|a_{j_0}|}_{\geq 1} (b_{j_N} + c_{j_N}) \end{aligned}$$

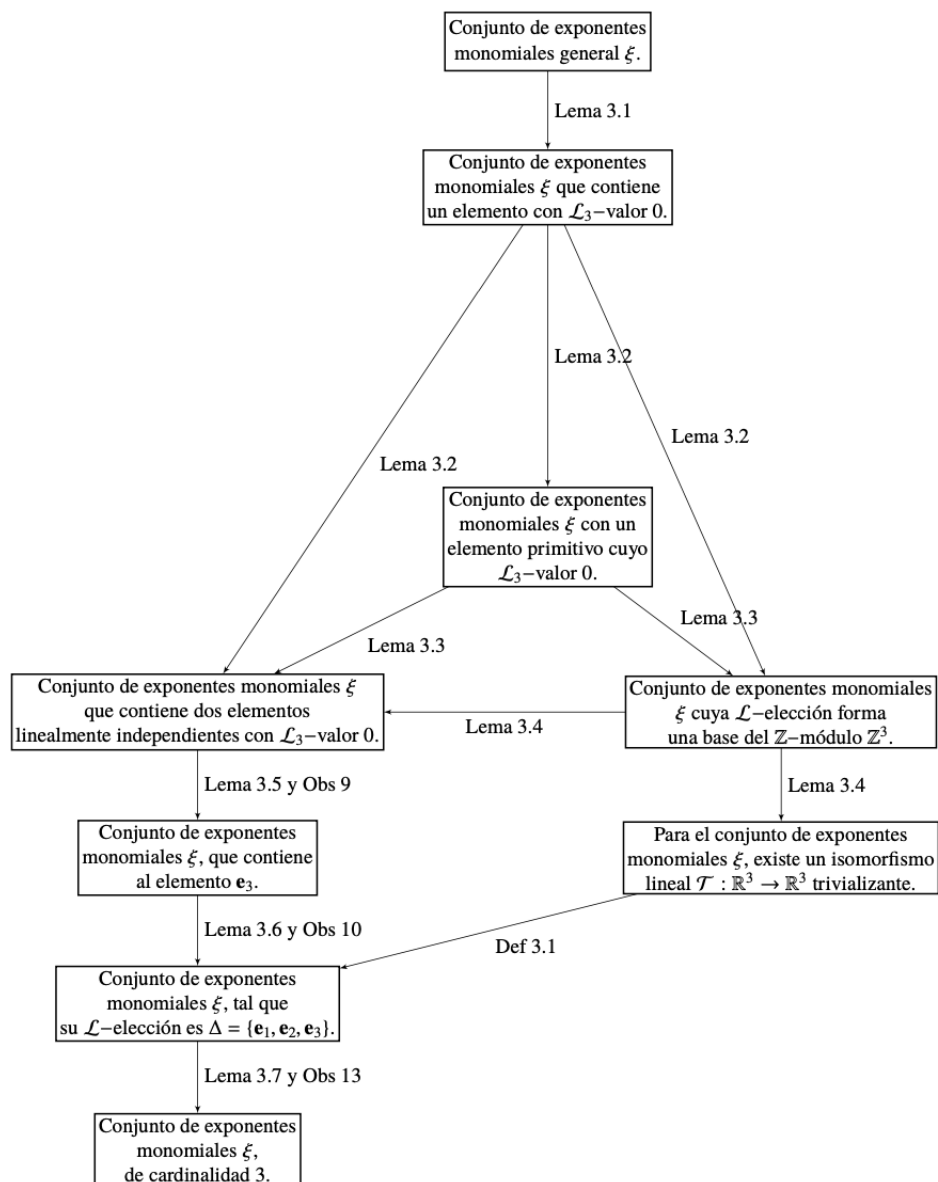
Esto prueba que $\mathcal{R}\left(\mathbf{T}_2\left(\xi^{b_{j_0} + c_{j_0} - 1}\right)\right)$ está mas cercano a $(0,0)$ en comparación de $\mathcal{R}(\xi)$.

Por lo tanto, mediante un argumento de recurrencia, podemos suponer que $\mathcal{R}(\xi) = (0,0)$, lo que significa, por minimalidad de ξ que s debe ser 0. En otras palabras, ξ tiene solamente al vector \mathbf{e}_3 con \mathcal{L}_3 -valor distinto de 0. \square

OBSERVACIÓN 13. Notemos que al aplicar iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash a un conjunto de exponentes monomiales que tiene un único elemento γ con $\mathcal{L}_3(\gamma) \neq 0$, genera un conjunto de exponentes monomiales minimal con 3

elementos. En efecto, las iteraciones del \mathcal{L} -algoritmo de Nash mantienen fijo el elemento γ y solo realizan modificaciones en $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$. Según el Teorema 3.1, la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo de Nash nos proporciona 2 elementos ρ_1, ρ_2 en $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$. Por lo tanto, la iteración finita del \mathcal{L} -algoritmo nos lleva al conjunto de exponentes monomiales $\xi' = \{\rho_1, \rho_2, \gamma\}$ cuya cardinalidad es 3. Esto concluye la demostración del Teorema 3.2.

El diagrama que resume la estrategia para la demostración del teorema 3.2 es el siguiente:



1.1. Ejemplo. Observemos que los ejemplos 15 y 16 ilustran que la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash siguiendo las elecciones de \mathcal{L} genera un conjunto de exponentes monomiales con tres elementos para una carta afín de la modificación de Nash de X_σ . Pero no necesariamente las cartas afines que se obtienen con la elección de \mathcal{L} cubren por completo NX_σ .

El siguiente ejemplo, ilustra la iteración de la modificación de Nash siguiendo las elecciones de diferentes transformaciones lineales \mathcal{L}^i y sus respectivas afín. También se verificará que se cubre completamente NX_σ .

EJEMPLO 17. Consideremos la variedad tórica $\mathcal{V}(w^2 - xyz) \subseteq \mathbb{C}^4$ correspondiente al ejemplo 15 para $p = 1$. Entonces el conjunto de exponentes monomiales asociado a X_σ es:

$$\xi^0 = \{\underbrace{(1, 0, 0)}_{\gamma_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\gamma_2}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{\gamma_3}, \underbrace{(1, 1, 2)}_{\gamma_4}\}$$

consideremos la transformación lineal

$$\mathcal{L}^1 = (\mathcal{L}_1(x, y, z), \mathcal{L}_2(x, y, z), \mathcal{L}_3(x, y, z) = x)$$

donde \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 libres, los \mathcal{L}_3 -valores del conjunto ξ^0 respecto a \mathcal{L}^1 son $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 1$, $\mathcal{L}_3(\gamma_2) = 0$, $\mathcal{L}_3(\gamma_3) = 1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_4) = 1$, dependiendo de la definición que se da para $\mathcal{L}_1(x, y, z)$ y $\mathcal{L}_2(x, y, z)$, la transformación lineal \mathcal{L}^1 puede escoger dentro de tres alternativas en $\mathcal{S}(\xi^0)$:

- Si \mathcal{L}^1 escoge la terna $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ y aplicamos el Algoritmo de Nash una vez, obtenemos el conjunto de exponentes monomiales

$$\xi_1^1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

definimos el cono suave $\sigma_1^\vee = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ cuyo dual es:

$$\sigma_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

- Si \mathcal{L}^1 escoge la terna $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4\}$, iterando una vez el Algoritmo de Nash obtenemos el conjunto de exponentes monomiales

$$\xi_1^2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\},$$

que permite definir el cono suave $\sigma_2^\vee = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ cuyo dual es

$$\sigma_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -1)\}$$

- Si \mathcal{L}^1 escoge la terna $\{\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$, iterando una vez el Algoritmo de Nash obtenemos el conjunto de exponentes monomiales

$$\xi_3^1 = \{(1, 1, 2), (0, 1, 0), (0, -1, -1)\},$$

definimos el cono suave $\sigma_3^\vee = \{(1, 1, 2), (0, 1, 0), (0, -1, -1)\}$ cuyo dual es

$$\sigma_3 = \{(1, 0, 0), (1, 1, -1), (2, 0, -1)\}$$

Por otro lado, con la transformación lineal

$$\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}_1(x, y, z), \mathcal{L}_2(x, y, z), \mathcal{L}_3(x, y, z) = y),$$

donde \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 libres, los \mathcal{L}_3 -valores del conjunto ξ^0 respecto a \mathcal{L}^2 son $\mathcal{L}_3(\gamma_1) = 0$, $\mathcal{L}_3(\gamma_2) = 1$, $\mathcal{L}_3(\gamma_3) = 1$ y $\mathcal{L}_3(\gamma_4) = 1$, por lo tanto, dependiendo de la definición de $\mathcal{L}_1(x, y, z)$ y $\mathcal{L}_2(x, y, z)$, la transformación lineal \mathcal{L}^2 puede escoger dentro de tres alternativas en $\mathcal{S}(\xi^0)$:

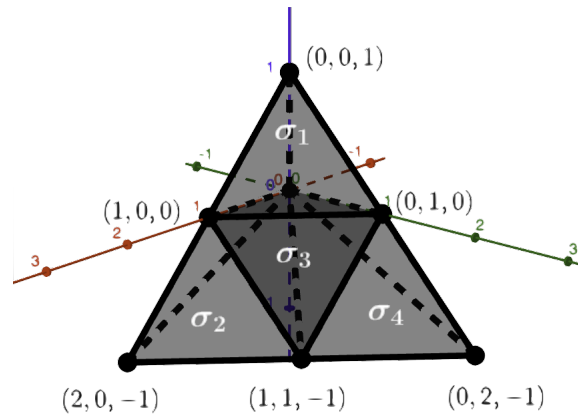
- Las elecciones de las ternas $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ y $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4\}$ arriban a los conos suaves σ_1 y σ_2 respectivamente.
- Si \mathcal{L}^2 escoge la terna $\{\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4\}$, la iteración del Algoritmo de Nash nos conduce al conjunto de exponentes monomiales

$$\xi_4^1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 2), (-1, 0, -1)\}$$

que permite definir el cono suave $\sigma_4^\vee = \{(1, 0, 0), (1, 1, 2), (-1, 0, -1)\}$ cuyo dual es

$$\sigma_4 = \{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (0, 2, -1)\}$$

Finalmente, las elecciones de las transformaciones lineales \mathcal{L}^1 y \mathcal{L}^2 permiten generar un abanico suave Σ que consiste en los conos σ_1 , σ_2 , σ_3 y σ_4 y todas sus caras. Además Σ es un refinamiento de σ . De esta manera, el morfismo tórico $\phi: X_\sigma \rightarrow X_\Sigma$ es una resolución de las singularidades de X_σ .

FIGURA 5. Cartas afín de la modificación de Nash para X_σ

OBSERVACIÓN 14. Las dos transformaciones lineales utilizadas \mathcal{L}^1 y \mathcal{L}^2 corresponden a la ecuación del plano cuyo vector normal es \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 respectivamente. La primera transformación lineal con $\mathcal{L}_3(x, y, z) = x$ y haciendo variar las transformaciones lineales \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_1 se generaron los conos σ_1 , σ_2 y σ_3 los cuales se pegan en el rayo generado por \mathbf{e}_1 como se observa en la figura 5. De forma análoga, \mathcal{L}^2 generó los conos σ_1 , σ_3 y σ_4 los cuales se pegan en el rayo generado por \mathbf{e}_2 .

2. \mathcal{L} -Transformaciones lineales con pendientes irracionales para $n = 2$

Dado un conjunto minimal de exponentes monomiales esencial

$$\xi^0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$$

de alguna superficie tórica X_σ . Fijemos las transformaciones lineales

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y) = a_1x + b_1y, \mathcal{L}_2(x, y) = a_2x + b_2y)$$

con coeficientes enteros y $\text{mcd}(a_i, b_i) = 1$ para $i = 1, 2$ tal que $\mathcal{L}_i(\xi^0|_{\mathbb{Z}^i \times \{0\}^{2-i}}) \geq 0$ para $i = 1, 2$, sabemos que la \mathcal{L} -elección siguiendo el algoritmo de Nash escoge una carta afín de la modificación de Nash de X_σ , pero no es claro que las cartas afines que se obtienen con la \mathcal{L} -elección cubran la variedad.

DEFINICIÓN 3.2. *Llamaremos camino esencial y lo denotamos por $\mathcal{P}_{\mathcal{L}^j}$ a la cadena de conjuntos monomiales esencial que se obtienen iterando el \mathcal{L} -algoritmo de Nash hasta la iteración j .*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}^j} : \xi^0 \rightarrow \xi^1 \rightarrow \xi^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi^j,$$

en particular, si $\xi^0 \subset \mathbb{Z}^n$ y la cardinalidad del conjunto ξ^j es n , diremos que $\mathcal{P}_{\mathcal{L}^j}$ es un camino esencial liso.

EJEMPLO 18. *En el ejemplo 12, las funciones lineales*

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1(x, y, z) = x, \mathcal{L}_2(x, y, z) = y, \mathcal{L}_3(x, y, z) = z)$$

generan el siguiente camino esencial liso

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}^2} : \xi^0 \rightarrow \xi^1 \rightarrow \xi^2$$

donde

- $\xi^0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 3)\}$
- $\xi^1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 1, 2)\}$
- $\xi^2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

DEFINICIÓN 3.3. *Diremos que las funciones $\mathcal{L}^1 = (\mathcal{L}_1^1, \mathcal{L}_2^1, \dots, \mathcal{L}_n^1)$ y $\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}_1^2, \mathcal{L}_2^2, \dots, \mathcal{L}_n^2)$ son uniconductales para el conjunto ξ^0 si definen el mismo camino esencial. Es decir $\mathcal{P}_{\mathcal{L}^1}^j = \mathcal{P}_{\mathcal{L}^2}^j$*

OBSERVACIÓN 15. Desde [3] sabemos que un cono 2-dimensional $\sigma \subseteq N_R \approx \mathbb{R}^2$ fuertemente convexo se puede expresar como $\sigma = \text{cone}(\mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2)$ para alguna base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ con $0 \leq k < d$, $\text{mcd}(d, k) = 1$.

Consideremos una variedad tórica singular X_σ donde $\sigma := \text{cone}\{\mathbf{e}_2, d\mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2\}$ esta en forma normal y ξ^0 el conjunto de exponentes monomiales esencial para X_σ , se puede determinar la resolución minimal $\pi : X_\Sigma \rightarrow X_\sigma$, donde Σ es el refinamiento suave de σ dado por las fracciones continuas de Hirzebruch-Jung para $\frac{d}{k}$, este método entrega una cantidad finita de conos suaves σ_i en Σ cuya unión es σ .

Se propone cubrir cada uno del conos σ_i en el refinamiento Σ con una cantidad finita de cartas afín generadas por la iteración de algoritmo de Nash siguiendo las elecciones de una cantidad finita de transformación lineal L_i con pendientes dentro del intervalo $] -\infty, 0] \cup \left[\frac{d}{k}, +\infty \right[$, ya que se debe satisfacer la condición $\mathcal{L}_i(\xi) \geq 0$.

Comenzando a cubrir las cartas afín de la superficie lisa X_Σ desde el cono $\sigma_1 = \text{cone}((1, 0), (0, 1))$, en primer lugar iteramos el algoritmo con el conjunto de exponentes monomiales ξ^0 siguiendo las elecciones de

$$\mathcal{L}^1 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = x),$$

note que $\mathcal{L}_1(x, y)$ no está fijada, de esta manera en un número finito de iteraciones obtendremos 2 cartas afín lisas para Σ , la primera cubre completamente σ_1 y la segunda cubre una parte de σ_2 adyacente a σ_1 digamos $\sigma_{2,1} = \text{cone}((1, 0), (p, -q))$, Luego volvemos a iterar el algoritmo al conjunto de exponentes monomiales ξ^0 siguiendo una nueva transformación lineal $\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = px - qy)$, esta nueva iteración nos entrega otras 2 cartas afín lisas la primera ya fue determinada con \mathcal{L}^1 y la segunda es cubre una nueva parte de Σ adyacente al cono $\sigma_{2,1}$. Es natural preguntarnos si este procedimiento en una cantidad finita de pasos cubre completamente el refinamiento suave Σ .

Si la propuesta es cierta, entonces este procedimiento construye un abanico Σ' que es un refinamiento suave de Σ y en particular también lo es de

σ . En consecuencia, la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash entrega otra resolución de singularidades $\mathcal{N} : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\sigma}$ ya que existe el morfismo $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma'} & \xrightarrow{f} & X_{\Sigma} \\ & \searrow \mathcal{N} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

es decir, $\mathcal{N} = \pi \circ f$.

El siguiente ejemplo ilustra la propuesta descrita:

EJEMPLO 19. [Variedad tórica con punto doble racional de tipo A_4]

Consideremos la superficie tórica X_{σ} , donde $\sigma = \text{cone}(e_2, 5e_1 - 4e_2)$ en forma normal que puede ser identificada con la variedad $V(z^5 - xy) \subseteq \mathbb{C}^3$, notemos que el origen es el único punto singular.

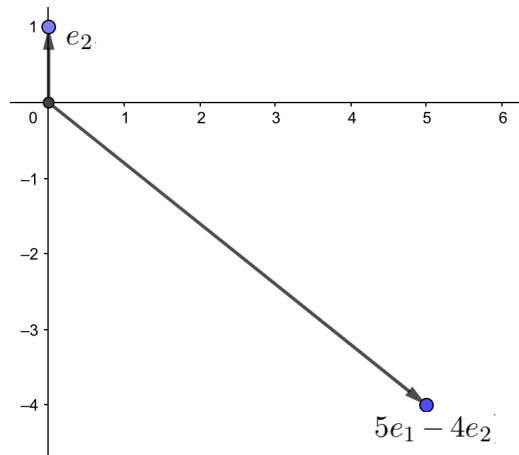


FIGURA 6. $\sigma = \text{cone}(e_2, 5e_1 - 4e_2)$

Primero hallamos una resolución de las singularidades de la variedad tórica X_σ , mediante fracciones continuas de Hirzebruch-Jung para $5/4$.

$$\frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$$

| ν_5 | ν_4 | ν_3 | ν_2 | ν_1 | ν_0 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Así obtenemos un refinamiento suave Σ de σ que consiste en los conos $\sigma_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $1 \leq i \leq 5$ y todas sus caras. El morfismo $\pi : X_\Sigma \rightarrow X_\sigma$ es una resolución de las singularidades de X_σ .

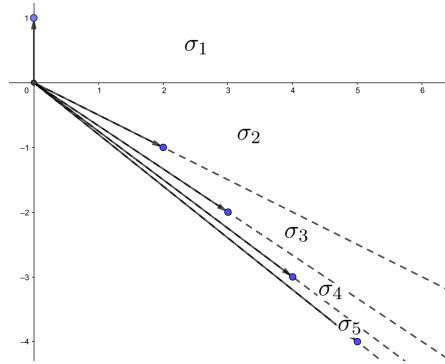


FIGURA 7. Refinamiento suave de σ

Además, corresponde a la **resolución minimal** de las singularidades de X_σ .

Por otro lado, mediante la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash al conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi_1^0 = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$ para X_σ , cubriremos con cartas afín la superficie suave X_Σ .

Con el vector v_1 dado por la resolución minimal, construimos la primera transformación lineal $\mathcal{L}^1 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = x)$. Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo a

ξ_1^0 siguiendo \mathcal{L}^1 y variando $\mathcal{L}_1(x, y)$, obtenemos los siguientes caminos esenciales lisos:

$$\mathcal{L}^1: \quad \xi_1^0 \rightarrow \xi_1^1 \rightarrow \xi_1^2 \rightarrow \xi_1^3 \begin{array}{l} \nearrow \xi_1^4 \\ \searrow \xi_2^4 \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ll} \xi_1^0 = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\} & \xi_1^3 = \{(1, 0), (1, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2)\} \\ \xi_1^1 = \{(1, 0), (1, 1), (3, 5), (3, 4)\} & \xi_1^4 = \{(1, 0), (0, 1)\} \\ \xi_1^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 5), (2, 4), (2, 3)\} & \xi_2^4 = \{(1, 5), (0, -1)\} \end{array}$$

Los conjuntos ξ_1^4 y ξ_2^4 respectivamente generan en el espacio dual las cartas lisas afín $\sigma_1 = \text{cone}\{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ que cubre σ_1 y parte de σ_2 de X_Σ , tal y como se ilustra la imagen 8.

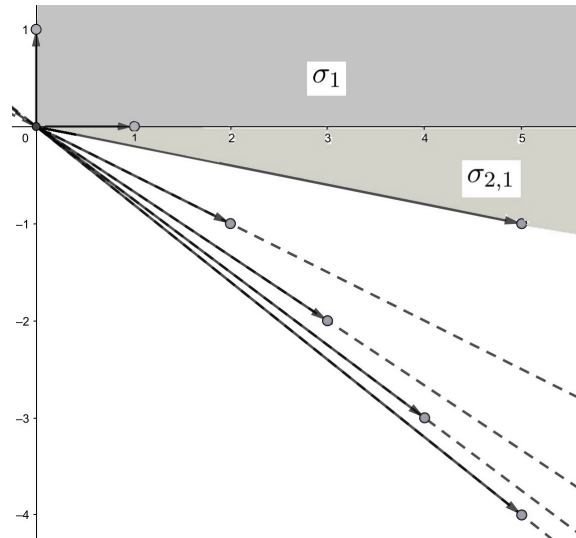


FIGURA 8. Cartas afín para X_Σ siguiendo las elecciones de \mathcal{L}^1 .

La carta lisa afín $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ nos permite construir una segunda transformación lineal $\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 5x - y)$.

Aplicando el \mathcal{L} -algoritmo al conjunto ξ_1^0 siguiendo \mathcal{L}^2 y variando \mathcal{L}_1 , obtenemos los siguientes caminos esenciales lisos:

$$\mathcal{L}^2: \quad \xi_1^0 \rightarrow \xi_1^1 \rightarrow \xi_1^2 \begin{array}{l} \nearrow \xi_1^3 \rightarrow \xi_2^4 \\ \searrow \xi_2^3 \rightarrow \xi_3^4 \end{array}$$

donde

$\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3$ y ξ_2^4 como antes

$\xi_2^3 = \{(-1, -5), (1, 3), (0, -1)\}$

$\xi_3^4 = \{(-1, -5), (1, 4)\}$

Los conjuntos ξ_2^4 y ξ_3^4 generan en el espacio dual, las cartas lisas afín $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ y $\sigma_{2,2} = \text{cone}\{(5, -1), (4, -1)\}$ de X_Σ

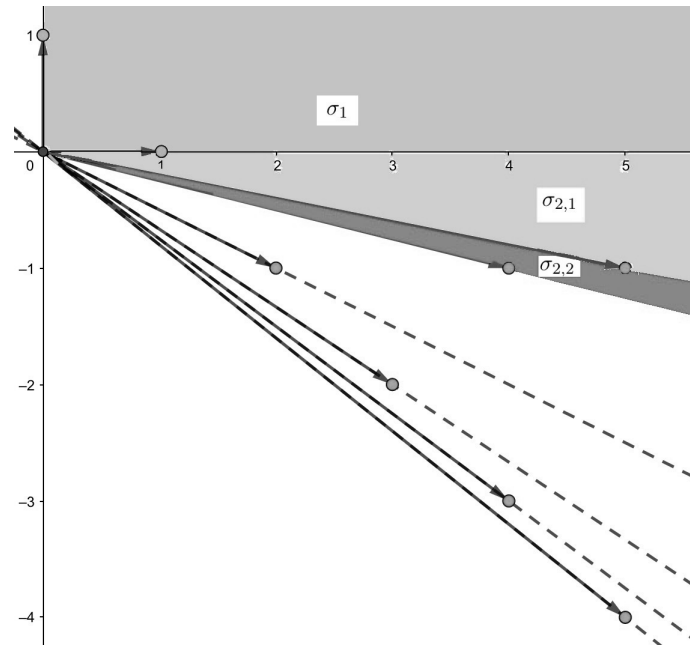


FIGURA 9. Cartas afín para X_Σ siguiendo las elecciones de \mathcal{L}^1 y \mathcal{L}^2

La carta lisa afín $\sigma_{2,1}$ se obtuvo siguiendo las elecciones de \mathcal{L}^1 y \mathcal{L}^2 , lo que nos asegura el pegado de las cartas afín en X_Σ .

Siguiendo este proceso, obtenemos el siguiente diagrama de caminos esenciales para los estallidos de X_σ :

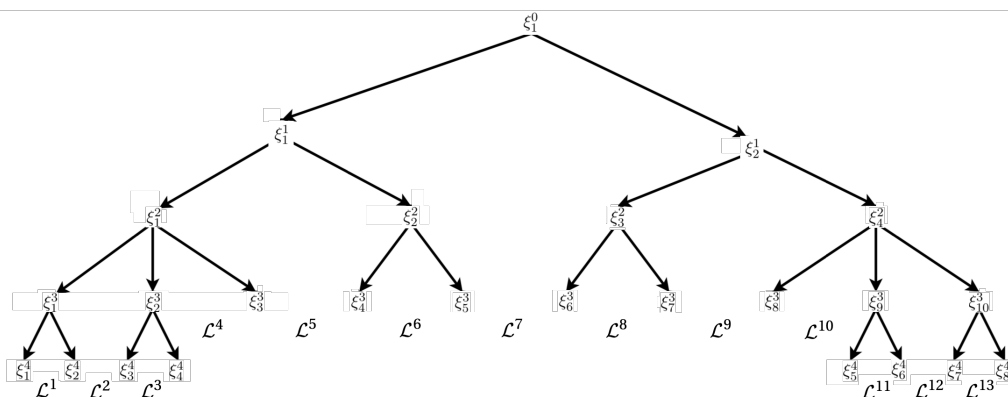


FIGURA 10. Diagrama de todos los caminos esenciales dados por \mathcal{L}^i donde $1 \leq i \leq 13$

donde las transformaciones lineales son:

$$\mathcal{L}^1 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = x)$$

$$\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 5x - y)$$

$$\mathcal{L}^3 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 4x - y)$$

$$\mathcal{L}^4 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 3x - y)$$

$$\mathcal{L}^5 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 5x - 2y)$$

$$\mathcal{L}^6 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 2x - y)$$

$$\mathcal{L}^7 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 5x - 3y)$$

$$\mathcal{L}^8 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 3x - 2y)$$

$$\mathcal{L}^9 = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 10x - 7y)$$

$$\mathcal{L}^{10} = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 7x - 5y)$$

$$\mathcal{L}^{11} = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 11x - 8y)$$

$$\mathcal{L}^{12} = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 15x - 11y)$$

$$\mathcal{L}^{13} = (\mathcal{L}_1(x, y), \mathcal{L}_2(x, y) = 4x - 3y)$$

y los conjuntos de exponentes monomiales son:

$$\xi_1^0 = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$$

$$\xi_1^1 = \{(1, 0), (1, 1), (3, 5), (3, 4)\}$$

$$\xi_2^1 = \{(1, 1), (4, 5), (0, -1), (-3, -5)\}$$

$$\xi_1^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 5), (2, 4), (2, 3)\}$$

$$\xi_2^2 = \{(1, 1), (3, 5), (-2, -5), (2, 3), (0, -1)\}$$

$$\xi_3^2 = \{(1, 1), (-3, -5), (7, 10), (-1, -2), (3, 4)\}$$

$$\xi_4^2 = \{(1, 1), (4, 5), (-1, -2), (-4, -6), (-7, -10)\}$$

$$\xi_1^3 = \{(1, 0), (1, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2)\}$$

$$\xi_2^3 = \{(-1, -5), (1, 3), (0, -1)\}$$

$$\xi_3^3 = \{(2, 5), (-1, -3)\}$$

$$\xi_4^3 = \{(-2, -5), (1, 2)\}$$

$$\xi_5^3 = \{(3, 5), (-1, -2)\}$$

$$\xi_6^3 = \{(-3, -5), (2, 3)\}$$

$$\xi_7^3 = \{(7, 10), (-2, -3)\}$$

$$\xi_8^3 = \{(-7, -10), (5, 7)\}$$

$$\xi_9^3 = \{(11, 15), (-8, -11)\}$$

$$\xi_{10}^3 = \{(-11, -15), (3, 4)\}$$

$$\xi_1^4 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$\xi_2^4 = \{(1, 5), (0, -1)\}$$

$$\xi_3^4 = \{(-1, -5), (1, 4)\}$$

$$\xi_4^4 = \{(1, 3), (-1, -4)\}$$

$$\xi_5^4 = \{(-5, -7), (8, 11)\}$$

$$\xi_6^4 = \{(11, 15), (-8, -11)\}$$

$$\xi_7^4 = \{(-11, -15), (3, 4)\}$$

$$\xi_8^4 = \{(4, 5), (-3, -4)\}$$

Finalmente, la variedad X_Σ queda cubierta por 14 cartas afines como muestra la figura

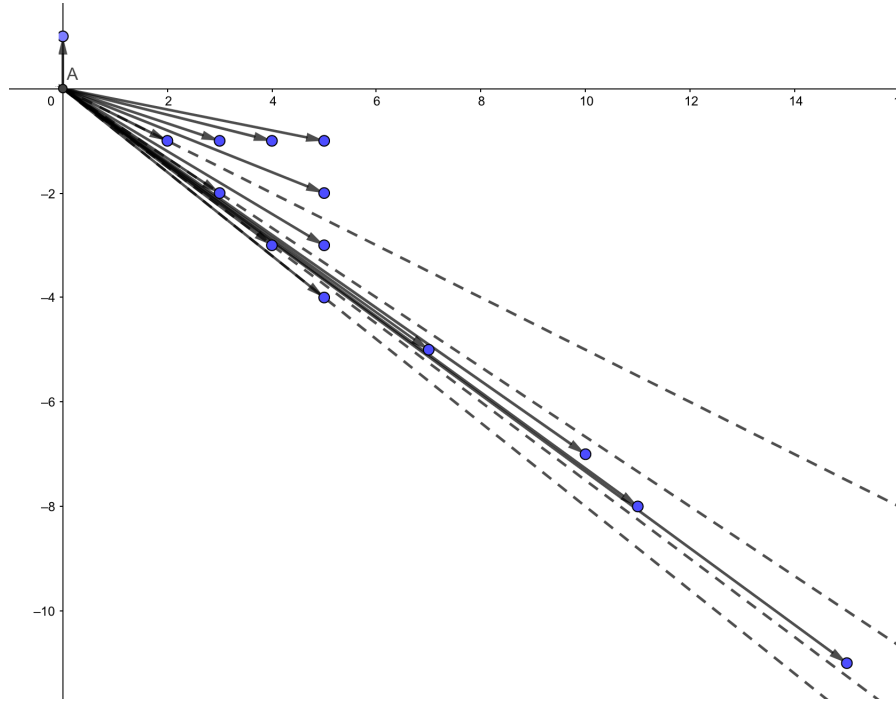


FIGURA 11. Cartas afín para X_Σ

De esta manera se ha construido un abanico Σ' que es un refinamiento de Σ y en particular también lo es de σ .

Por lo tanto, la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash entregó otra resolución de singularidades $\mathcal{N} : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\sigma$.

Además tenemos la existencia del morfismo $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma'} & \xrightarrow{f} & X_{\Sigma} \\ & \searrow \mathcal{N} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

es decir, $\mathcal{N} = \pi \circ f$.

OBSERVACIÓN 16. Es posible dividir el problemas en dos grandes partes:

1. Aproximación del \mathcal{L} -algoritmo de Nash con transformaciones lineales pendiente irracional, a través de la iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash utilizando transformaciones lineales con pendiente racional.
2. Cotas locales para el \mathcal{L} -algoritmo de Nash utilizando transformaciones lineales con pendiente racional.

Resolver estas dos partes solucionan el problema del estallido de Nash para superficies tóricas.

LEMA 3.8. Sean $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica y $\mathcal{P}_j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$ un camino esencial generado hasta la j -ésima iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash siguiendo una transformación lineal L con pendiente irracional q . Entonces existe un intervalo $]\alpha_j, \beta_j[\subset \mathbb{R}$ que contiene a q donde cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[$ recorre \mathcal{P}_j .

DEMOSTRACIÓN. Sean $\xi_1^0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica y $L(x, y) \mapsto ax + by$ una transformación lineal con pendiente irracional q tal que $L(\xi_1^0) \geq 0$.

Como $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z}^2$ y la pendiente de L es irracional, entonces existe un orden estrictamente creciente en los L -valores del conjunto ξ_1^0 , pues en caso contrario se contradice el hecho que $q \in \mathbb{Q}^C$. Sin perder generalidad supongamos que:

$$0 < L(\gamma_1) < L(\gamma_2) < \dots < L(\gamma_{r'}) \quad (3.18)$$

donde $\det(\gamma_1 \ \gamma_2) \neq 0$, $L(\gamma_1) < L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi_0^1$ y $L(\gamma_2) < L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi_1^0$ tal que $\det(\gamma_1 \ \gamma_k) \neq 0$. Entonces la elección de L para la primera iteración del algoritmo de Nash es γ_1 y γ_2 .

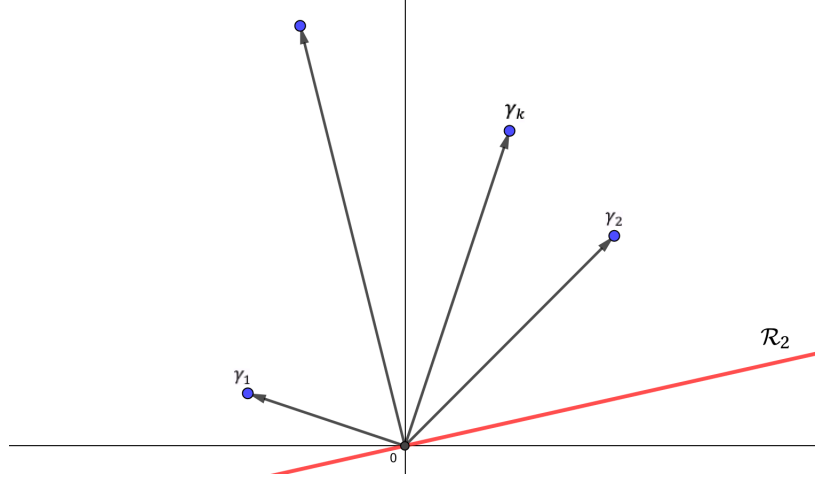


FIGURA 12. Representación del conjunto ξ

Por otro lado, definimos la función distancia d , entre la recta $L: \{(x, y) \mid ax + by = 0\} \in \mathbb{P}_1(k)$ (plano proyectivo), y el punto $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^2$ como:

$$d: \mathbb{P}_1(k) \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (L, \gamma) \mapsto d(L, \gamma) := \frac{|a\gamma_1 + b\gamma_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Notemos que para cada $1 \leq i \leq r$, la recta L_i paralela a L que pasa por el punto γ_i , tiene ecuación $ax + by = L(\gamma_i)$, donde $L(\gamma_i)$ es el L -valor de γ_i , entonces tenemos una secuencia de rectas L_1, L_2, \dots, L_k paralelas a L que inducen el orden estricto:

$$0 < d(L, \gamma_1) < d(L, \gamma_2) < \dots < d(L, \gamma_{r'}) \tag{3.19}$$

donde $\det(\gamma_1 \ \gamma_2) \neq 0$, $L(\gamma_1) < L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi_0^1$ y $L(\gamma_2) < L(\gamma_k)$ para todo $\gamma_k \in \xi_1^0$ tal que $\det(\gamma_1 \ \gamma_k) \neq 0$.

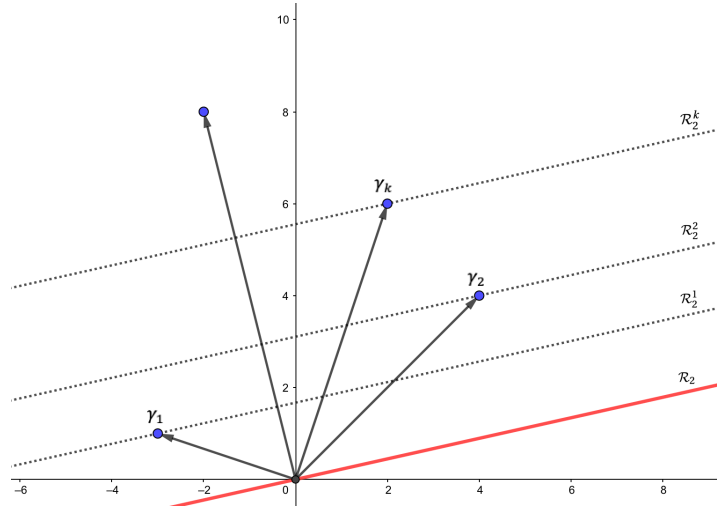


FIGURA 13. Representación de las rectas paralelas a L que pasan por los elementos de ξ .

Como d es una función continua, entonces por [23, pág 118] para cada par $(L, \gamma) \in \mathbb{P}_1(k) \times \mathbb{R}^2$ y entorno $V \in \mathbb{R}$, existe un entorno $U \subset \mathbb{P}_1(k) \times \mathbb{R}^2$ de (L, γ) tal que $d(U) \subset V$. Es decir, existe $\epsilon_1 > 0$ donde cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_1, \beta_1[=]q - \epsilon_1, q + \epsilon_1[$ respeta el orden establecido en la desigualdad 3.19, y en consecuencia también mantiene la desigualdad 3.18, Por lo tanto cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_1, \beta_1[$ hace la misma elección que L al aplicar la primera iteración del algoritmo de Nash, Es decir cada T recorre el camino $\mathcal{P}_1 : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1$.

Por recurrencia, existe $\epsilon_j \in]0, \epsilon_{j-1}[\subset \dots \subset]0, \epsilon_1[$ de modo que cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[=]q - \epsilon_j, q + \epsilon_j[$ realiza las mismas elecciones que L hasta la j -ésima iteración del algoritmo. Entonces el camino esencial $\mathcal{P}_j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$ generado por L hasta la j -ésima iteración, también es recorrido por cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[$. \square

PROPOSICIÓN 3.1. Sean $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica y $\mathcal{P}_L^j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$ un camino esencial generado hasta la j -ésima iteración del \mathcal{L} -algoritmo de Nash siguiendo una transformación lineal L con pendiente irracional q . Entonces existe un intervalo uniconductual $]\alpha_j, \beta_j[\subset \mathbb{R}$ que contiene a q donde cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[$ recorre el camino esencial \mathcal{P}_L^j .

DEMOSTRACIÓN. Se sabe que entre dos números reales cualquiera, siempre existe un número racional, entonces por Lema 3.8 existe un intervalos $]\alpha_j, \beta_j[\in \mathbb{R}$ que contiene a q donde cada transformación lineal con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[$ recorre \mathcal{P}_j , entonces basta considerar las transformaciones lineales R_1 y R_2 con pendiente racional $m_1 \in]\alpha_j, q[$ y $m_2 \in]q, \beta_j[$ respectivamente.

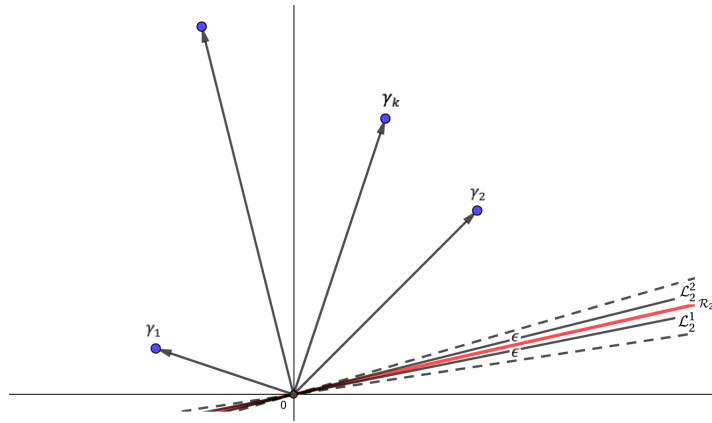


FIGURA 14. Representación de las rectas con pendientes racionales R_1 y R_2 .

□

Notemos que esto demuestra la primera parte de la observación 16, en efecto, dado un conjunto minimal de exponentes monomiales $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de alguna superficie tórica X_σ y el camino esencial

$$\mathcal{P}_L^j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$$

generado por j iteraciones del algoritmo siguiendo una transformación lineal L con pendiente irracional q tal que $L(\xi) \geq 0$. El teorema 3.1 afirma la existencia de un intervalo $I =]\alpha_j, \beta_j[$ donde cada transformación lineal con pendiente $m \in I$ recorre \mathcal{P}_L^j . Además por teorema 3.1 para cada transformación

lineal racional R con pendiente en I existe $\kappa_R \in \mathbb{Z}$ de modo que después de κ_R iteraciones \mathcal{P}_R^j es liso.

- Si $\kappa_R \leq j$, para alguna transformación lineal R con pendiente en $] \alpha_j, \beta_j [$, entonces \mathcal{P}_j es un camino liso, es decir $\#\xi_{i_j}^j = 2$.
- Si $\kappa_R > j$ para toda transformación lineal racional R con pendiente en $] \alpha_j, \beta_j [$, entonces podemos iterar el algoritmo κ_R veces siguiendo las elecciones de L , el camino esencial queda:

$$\mathcal{P}_{\kappa_R} : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_{\kappa_R}}^{\kappa_R}$$

Finalmente el intervalo uniconductal es $] \alpha_{\kappa_R}, \beta_{\kappa_R} [$, que no necesariamente contiene la pendiente de R .

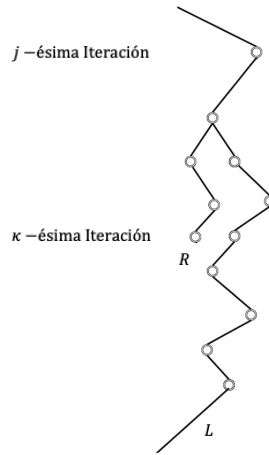


FIGURA 15. Representación Pblemática

Por lo tanto, para resolver el problema de Nash para superficies tóricas solo falta hallar cotas locales de L-algoritmos de pendiente racional.

Bibliografía

- [1] Atanasov, A., Lopez, C., Perry, A., Proudfoot, N., y Thaddeus, M.. Resolving Toric Varieties with Nash Blow-ups. *Experimental Mathematics*, vol. 20(3), págs. 288–303, 2011.
- [2] E. Bierstone y P. D. Milman. Desingularization of Toric and Binomial Varieties. *Journal of Algebraic Geometry*, vol. 15(3), págs. 448–486, 2006.
- [3] David A. Cox, John B. Little, y Henry K. Schenck. *Toric Varieties*. American Mathematical Society, 2011.
- [4] Cox, D., Little, J., y O’Shea, D.. *Ideals, Varieties, and Algorithms*, 3ª edición. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007.
- [5] Andrés Daniel Duarte. *Nash Modification on Toric Surfaces and Higher Nash Blowup on Normal Toric Varieties*. Tesis Doctoral, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2013.
- [6] Eisenbud, David. *Commutative Algebra*, vol. 150 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995. Con una visión hacia la geometría algebraica.
- [7] M. Frumkin. An Application of Modular Arithmetic to the Construction of Algorithms for the Solution of Systems of Linear Equations. *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 229(5), págs. 1067–1070, 1976.
- [8] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*, vol. 131. Princeton University Press, 1993.
- [9] Gerardo Gonzalez-Sprinberg. Éventails en dimension 2 et transformé de Nash, vol. 2, págs. 1–68, 1977.
- [10] Gerardo Gonzalez-Sprinberg. Résolution de Nash des points doubles rationnels. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 32(2), págs. 111–178, 1982.
- [11] Gerardo Gonzalez-Sprinberg. On Nash Blow-up of Orbifolds. *Singularities - Niigata-Toyama 2007 pp. 133–149, Advanced Studies in Pure Mathematics*, 2009.
- [12] Pedro D. González Pérez y Bernard Teissier. Toric Geometry and the Simple Nash Modification. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, vol. 108(1), págs. 1–48, 2014.
- [13] Dima Grigoriev y Pierre D. Milman. Nash Resolution for Binomial Varieties as Euclidean Division. A Priori Termination Bound, Polynomial Complexity in Essential Dimension 2. *Advances in Mathematics*, vol. 231(6), págs. 3389–3428, 2012.
- [14] Hartshorne, R.. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52. Springer, 1977.
- [15] Robin Hartshorne. *Deformation Theory*, vol. 257 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010.

- [16] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: II. *Annals of Mathematics*, págs. 205–326, 1964.
- [17] Heisuke Hironaka. On Nash blowing-up. En *Arithmetic and Geometry*, págs. 103–111. Springer, 1983.
- [18] Humphreys, J. E.. *Linear Algebraic Groups*, vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Augusto Nobile. Some properties of the Nash blowing-up, *Pacific Journal of Mathematics*, volume 60, pages 297-305, 1975.
- [20] Serge Lang. *Algebra*, vol. 211 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 3ª edición, 2002.
- [21] Andres, D. y Levandovskyy, V.. *dmodapp.lib. A Singular 3-1-6 Library for Applications of Algebraic D-Modules*, 2012.
- [22] J. Lipman. On the Jacobian Ideal of the Module of Differentials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 21, págs. 422–426, 1969.
- [23] Munkres, J.R.. *Topology*, 2ª edición, Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [24] Daniel Perrin. *Algebraic Geometry*, Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2008. Una introducción, traducida del original en francés de 1995 por Catriona Maclean.
- [25] Vaho Rebassoo. *Desingularization Properties of the Nash Blow-up Process*. Tesis Doctoral, University of Washington, 1977.
- [26] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, 1986.
- [27] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer, Heidelberg, 3ª edición, 2013. Varieties in Projective Space.
- [28] Mark Spivakovsky. *Sandwiched Surface Singularities and the Nash Resolution for Surfaces*. Tesis Doctoral, 1985.
- [29] Bernard Teissier. The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants. En *Real and Complex Singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, págs. 565–678, 1977.