Grupo de Automorfismos de Hipersuperficies suaves

Grupo de Automorfismos de Hipersuperficies suaves

Ana Julisa Palomino Cabrera
Director: Dr. Alvaro Liendo Rojas

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca

23 de enero de 2023

Dados $n \geq 1$ y $d \geq 3$ enteros, consideremos lo siguiente

- V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $n+2$ con una base fija $\beta = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}\}$.
- $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo correspondiente.
- $\beta^* = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ la base dual de V, entonces $\{x_{i_1} \cdots x_{i_d} : 0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_d \leq n+1\}$ es una base del espacio vectorial de formas $S^d(V^*)$ de grado d.

Sea $F \in S^d(V^*)$ una forma, entonces denotamos a

- $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ como la hipersuperficie suave correspondiente de dimensión n y grado d.
- $Aut(X)$ el grupo de automorfismos regulares de X.
- $Lin(X)$ el subgrupo de $Aut(X)$ que extienden a los automorfismos de $\mathbb{P}^{n+1}$.

Sea $F \in S^d(V^*)$ una forma, entonces denotamos a

- $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ como la hipersuperficie suave correspondiente de dimensión n y grado d.
- $Aut(X)$ el grupo de automorfismos regulares de X.
- $Lin(X)$ el subgrupo de $Aut(X)$ que extienden a los automorfismos de $\mathbb{P}^{n+1}$. Observe que $Aut(\mathbb{P}^{n+1}) \cong PGL(V)$, entonces

$$Lin(X) = \{\varphi \in PGL(V) : \varphi(X) = X\}.$$

Teorema (1 y 2 - Matsumura y Monsky)

Sean X y X' hipersuperficies suaves de dimensión $n \geq 1$ y $d \geq 3$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n+1}$ y sea $\tau : X \to X'$ un isomorfismo. Si $(n, d) \neq (1, 3), (2, 4)$, entonces τ es la restricción del automorfismo lineal $\mathbb{P}^{n+1} \to \mathbb{P}^{n+1}$ en $PGL(V)$. En particular, cada automorfismo de X es lineal. Más aún, $Aut(X)$ es un grupo finito.

Supongamos que $(n, d) \neq (1,3), (2,4)$, entonces

$$\begin{aligned} Aut(X) =& \{\varphi \in PGL(V) : \tilde{\varphi}^*(F) = \lambda F,\ \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \\ & \tilde{\varphi} \in GL(V) \text{ tal que } \pi(\tilde{\varphi}) = \varphi\} \end{aligned}$$

donde $\tilde{\varphi}^* : S^d(V^*) \to S^d(V^*)$ es un automorfismo inducido por $\tilde{\varphi} \in GL(V)$ y está definido por $\tilde{\varphi}^*(F) = F \circ \tilde{\varphi}$.

Supongamos que $(n,d) \neq (1,3),(2,4)$, entonces

$$\begin{aligned} Aut(X) = &\{\varphi \in PGL(V) : \tilde{\varphi}^*(F) = \lambda F,\ \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \\ &\tilde{\varphi} \in GL(V) \text{ tal que } \pi(\tilde{\varphi}) = \varphi\} \end{aligned}$$

donde $\tilde{\varphi}^* : S^d(V^*) \to S^d(V^*)$ es un automorfismo inducido por $\tilde{\varphi} \in GL(V)$ y está definido por $\tilde{\varphi}^*(F) = F \circ \tilde{\varphi}$.

Consideremos los automorfismos de orden finito q, así $\tilde{\varphi}^q = I_V$. Por ende, $\tilde{\varphi}^*(F) = \xi^a F$.

Luego,

$$\tilde{\varphi}^* = diag(\xi^{\sigma_0}, \xi^{\sigma_1}, \ldots, \xi^{\sigma_{n+1}}).$$

Grupo de Automorfismos de Hipersuperficies suaves en el Espacio Proyectivo

Proposición (2.2 [GAL13])

Sean $n \geq 2$ y $d \geq 3$ enteros tales que $(n, d) \neq (2, 4)$. Un número primo p es el orden de un automorfismo de una hipersuperficie suave de dimensión n y grado d si y sólo si se cumple una de las siguientes afirmaciones

(*i*) *d es divisible por p.*

(*ii*) *$d - 1$ es divisible por p.*

(*ii*) *Existe $\ell \in \{1, 2, \ldots, n + 2\}$ tal que*

$$(1 - d)^{\ell} \equiv 1 \ mod \ p.$$

Corolario (2.4, [GAL13])

Sean $n \geq 2$ y $d \geq 3$ enteros, con $(n, d) \neq (2, 4)$. Un número primo p es el orden de un automorfismo de una hipersuperficie suave de dimensión n y grado d, entonces $p < (d-1)^{n+1}$.

Definición

- *Sea G un subgrupo de $PGL(V)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **lifting** *de G, si $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to G$ es un isomorfismo.*

Definición

- *Sea* G *un subgrupo de* $PGL(V)$. *Un subgrupo* $\tilde{G} \subset GL(V)$ *es un* **lifting** *de* G, *si* $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to G$ *es un isomorfismo. En este caso diremos que* G *es* **liftable**, *si* G *admite un lifting.*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $PGL(V)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **lifting** *de G, si $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to G$ es un isomorfismo. En este caso diremos que G es* **liftable**, *si G admite un lifting.*
- *Diremos que $\varphi \in PGL(V)$ es* **liftable**, *si $\langle \varphi \rangle$ es liftable.*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $PGL(V)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **lifting** *de G, si $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to G$ es un isomorfismo. En este caso diremos que G es* **liftable**, *si G admite un lifting.*
- *Diremos que $\varphi \in PGL(V)$ es* **liftable**, *si $\langle \varphi \rangle$ es liftable.*

Observación

Sea $\varphi \in PGL(V)$. Llamaremos a $\tilde{\varphi}$ el **lifting** *de φ, si $\tilde{\varphi}$ es un elemento de $GL(V)$ que tiene el mismo orden que φ y tal que $\pi(\tilde{\varphi}) = \varphi$.*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $Aut(X)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **F-lifting** *de G, si $\tilde{G}$ es un lifting de G y $\tilde{\varphi}^*(F) = F$, para todo $\tilde{\varphi} \in \tilde{G}$.*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $Aut(X)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **F-lifting** *de G, si $\tilde{G}$ es un lifting de G y $\tilde{\varphi}^*(F) = F$, para todo $\tilde{\varphi} \in \tilde{G}$. En este caso, diremos que G es* **F-liftable**, *si G admite un F-lifting.*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $Aut(X)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **F-lifting** *de G, si $\tilde{G}$ es un lifting de G y $\tilde{\varphi}^*(F) = F$, para todo $\tilde{\varphi} \in \tilde{G}$. En este caso, diremos que G es* **F-liftable**, *si G admite un F-lifting.*
- *Diremos que $\varphi \in Aut(X)$ es* **F-liftable**, *si el grupo $\langle \varphi \rangle$ es F-liftable*

Definición

- *Sea G un subgrupo de $Aut(X)$. Un subgrupo $\tilde{G} \subset GL(V)$ es un* **F-lifting** *de G, si $\tilde{G}$ es un lifting de G y $\tilde{\varphi}^*(F) = F$, para todo $\tilde{\varphi} \in \tilde{G}$. En este caso, diremos que G es* **F-liftable**, *si G admite un F-lifting.*
- *Diremos que $\varphi \in Aut(X)$ es* **F-liftable**, *si el grupo $\langle \varphi \rangle$ es F-liftable*

Observación

Sea $\varphi \in Aut(X)$. Llamaremos a $\tilde{\varphi}$ el **F-lifting** *de φ, si $\tilde{\varphi}$ es un lifting de φ y $\tilde{\varphi}^*(F) = F$.*

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5.$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde $\tilde{\varphi}_1 = diag(\xi_3, \xi_3^2, \xi_3, \xi_3^2, 1)$ y $\tilde{\varphi}_2 = diag(\xi_{17}, \xi_{17}^{-4}, \xi_{17}^{16}, \xi_{17}^{4}, 1)$.

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde
$\tilde{\varphi}_1 = diag(\xi_3, \xi_3^2, \xi_3, \xi_3^2, 1)$ y $\tilde{\varphi}_2 = diag(\xi_{17}, \xi_{17}^{-4}, \xi_{17}^{16}, \xi_{17}^4, 1)$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^*(F) =& (\boldsymbol{\xi_3} x_0)^4 (\boldsymbol{\xi_3^2} x_1) + (\boldsymbol{\xi_3^2} x_1)^4 (\boldsymbol{\xi_3} x_2) + (\boldsymbol{\xi_3} x_2)^4 (\boldsymbol{\xi_3^2} x_3) \\ &+ (\boldsymbol{\xi_3^2} x_3)^4 (\boldsymbol{\xi_3} x_0) + x_4^5 \\ =& x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5\end{aligned}$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde $\tilde{\varphi}_1 = diag(\xi_3, \xi_3^2, \xi_3, \xi_3^2, 1)$ y $\tilde{\varphi}_2 = diag(\xi_{17}, \xi_{17}^{-4}, \xi_{17}^{16}, \xi_{17}^4, 1)$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^*(F) =& (\boldsymbol{\xi_3} x_0)^4 (\boldsymbol{\xi_3^2} x_1) + (\boldsymbol{\xi_3^2} x_1)^4 (\boldsymbol{\xi_3} x_2) + (\boldsymbol{\xi_3} x_2)^4 (\boldsymbol{\xi_3^2} x_3) \\ &+ (\boldsymbol{\xi_3^2} x_3)^4 (\boldsymbol{\xi_3} x_0) + x_4^5 \\ =& x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2^*(F) =& (\boldsymbol{\xi_{17}} x_0)^4 (\boldsymbol{\xi_{17}^{-4}} x_1) + (\boldsymbol{\xi_{17}^{-4}} x_1)^4 (\boldsymbol{\xi_{17}^{16}} x_2) + (\boldsymbol{\xi_{17}^{16}} x_2)^4 (\boldsymbol{\xi_{17}^{4}} x_3) \\ &+ (\boldsymbol{\xi_{17}^{4}} x_3)^4 (\boldsymbol{\xi_{17}} x_0) + x_4^5 \\ =& x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_0 + x_4^5\end{aligned}$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0.$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}_1^*(F) = x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0 + x_0^4 x_1$$

Ejemplos

Sea X una hipersuperficie suave definida por

$$F = x_0^4 x_1 + x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0.$$

Sea $G \subset Aut(X)$ generado por $[\tilde{\varphi}_1]$ y $[\tilde{\varphi}_2]$, donde

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}_1^*(F) = x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^4 x_0 + x_0^4 x_1$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2^*(F) = & x_0^4(\boldsymbol{\xi_5} x_1) + (\boldsymbol{\xi_5} x_1)^4(\boldsymbol{\xi_5^2} x_2) + (\boldsymbol{\xi_5^2} x_2)^4(\boldsymbol{\xi_5^3} x_3) \\ & + (\boldsymbol{\xi_5^3} x_3)^4(\boldsymbol{\xi_5^4} x_4) + (\boldsymbol{\xi_5^4} x_4)^4 x_0 = \boldsymbol{\xi_5} F \end{aligned}$$

Teorema (3.2, [WY19])

Sea X una hipersuperficie suave de dimensión 3 y grado 3. Entonces, $G \subset Aut(X)$ si y sólo si G es isomorfo a un subgrupo de uno de los siguientes 6 grupos:

$$C_3^4 \rtimes S_5, \quad ((C_3^2 \rtimes C_3) \rtimes C_4) \times S_3, \quad C_{24}, \quad C_{16},$$
$$PSL(2,11), \quad S_5 \times C_3.$$

Teorema (2.2, [OY15])

Sea X una hipersuperficie suave de dimensión 3 y grado 5. Entonces, $G \subset Aut(X)$ si y sólo si G es isomorfo a un subgrupo de uno de los siguientes 22 grupos:

Teorema (2.2, [OY15])

Sea X una hipersuperficie suave de dimensión 3 y grado 5. Entonces, $G \subset Aut(X)$ si y sólo si G es isomorfo a un subgrupo de uno de los siguientes 22 grupos:

$$C_5^4 \rtimes S_5,\ C_4 \times (C_5^3 \rtimes S_3),\ (C_5^2 \times C_4^2) \rtimes C_2, C_{16} \times (C_5^2 \rtimes C_2),$$
$$S_3 \times (C_5^3 \rtimes S_3),\ C_5 \times C_{16} \times C_4,\ C_{64} \times C_5,\ C_5^2 \times C_4 \times S_3,$$
$$(C_5^2 \rtimes C_2) \times (C_{13} \rtimes C_3),\ C_{16} \times (C_5 \times S_3),\ C_{256},$$
$$C_4 \times C_5 \times (C_{13} \rtimes C_3),\ C_5 \times (C_{51} \rtimes C_4),\ (C_5^2 \times C_3^2) \rtimes D_8,$$
$$C_{205} \rtimes C_5,\ C_5 \times S_3 \times (C_{13} \rtimes C_3),$$
$$C_5 \times ((SL(2,3) \times C_2) \rtimes C_2),\ SL(2,3) \rtimes C_4,\ C_5 \times (C_3 \rtimes Q_8),$$
$$C_5 \times D_{24},\ C_5 \times S_5,\ G_{32} \times C_2$$

Teorema (3.5, [GALM21])

Sea $n \geq 1$ *y* $d \geq 3$ *con* $(n, d) \neq (1, 3), (2, 4)$*. Entonces el grupo de automorfismos de cada hipersuperficie suave de dimensión* n *y grado* d *en* $\mathbb{P}(V)$ *es* F*-liftable si, y solo si,* d *y* $n + 2$ *son relativamente primos.*

Problema de tesis secundario

Sean n y d otros valores pequeños, tales que $gcd(d, n+2) = 1$.

- ¿Será posible calcular explícitamente el grupo de automorfismos de hipersuperficies suaves de dimensión n y grado d?

Problema de tesis secundario

Sean n y d otros valores pequeños, tales que $gcd(d, n+2) = 1$.

- ¿Será posible calcular explícitamente el grupo de automorfismos de hipersuperficies suaves de dimensión n y grado d?
- Como primer paso, queremos calcular el grupo de automorfismos de hipersuperficies suaves de dimensión 3 y grado 4.

Espacio Proyectivo con peso

Definición (Pesos y su acción inducida)

Sea $a = (a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+2}_{>0}$*, y definamos la acción correspondiente de* $\mathbb{G}_m$ *en* $\mathbb{A}^{n+2} - \{0\}$*:*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{G}_m \times (\mathbb{A}^{n+2} - \{0\}) &\to \mathbb{A}^{n+2} - \{0\} \\ (\lambda, (x_0, \ldots, x_{n+1})) &\mapsto (\lambda^{a_0} x_0, \ldots, \lambda^{a_{n+1}} x_{n+1}) \end{aligned}$$

Definición (Pesos y su acción inducida)

Sea $a = (a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+2}_{>0}$*, y definamos la acción correspondiente de* $\mathbb{G}_m$ *en* $\mathbb{A}^{n+2} - \{0\}$*:*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{G}_m \times (\mathbb{A}^{n+2} - \{0\}) &\to \mathbb{A}^{n+2} - \{0\} \\ (\lambda, (x_0, \ldots, x_{n+1})) &\mapsto (\lambda^{a_0} x_0, \ldots, \lambda^{a_{n+1}} x_{n+1}) \end{aligned}$$

Definición

Si $gcd(a_0, \cdots, \widehat{a_i} \cdots, a_{n+1}) = 1$*, para todo* $0 \leq i \leq n+1$*. Diremos que el peso* $a = (a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+2}_{>0}$ *está* **bien-formado***,*

Definición (Espacio Proyectivo con peso)

Sea $a = (a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+2}_{>0}$. *Definimos un* **a-espacio proyectivo con peso** *como el cociente*

$$\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1}) = (\mathbb{A}^{n+2} - \{0\})/\alpha.$$

Definición (Espacio Proyectivo con peso)

Sea $a = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+2}_{>0}$. *Definimos un* **a-espacio proyectivo con peso** *como el cociente*

$$\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1}) = (\mathbb{A}^{n+2} - \{0\})/\alpha.$$

Definición

El espacio proyectivo con peso $\mathbb{P}(a)$ *es llamado* **bien-formado** *si el peso* a *es bien-formado.*

Definición

El anillo de polinomios en $n+2$ variables con peso a es

$$k_a[x_0, \ldots, x_{n+1}] \quad con \quad wt(x_i) = a_i.$$

Definición

Sea $f \in k[x_0, \ldots, x_{n+1}]$, *donde* $wt(x_i) = a_i$ *para algún peso* $a = (a_0, \ldots, a_{n+1})$. *Diremos que* f *es* **homogéneo con peso a y de grado d**, *si cada monomio de f es de grado d,*

Definición

Sea $f \in k[x_0, \ldots, x_{n+1}]$, donde $wt(x_i) = a_i$ para algún peso $a = (a_0, \ldots, a_{n+1})$. Diremos que f es **homogéneo con peso a y de grado d**, *si cada monomio de f es de grado d, es decir*

$$f = \sum_{i=0}^{m} c_i \left(\prod_{j=0}^{n+1} x_j^{d_j^{(i)}} \right),$$

donde $c_i \in k$ y $m \in \mathbb{N}$, $\forall\ i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$,

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j d_j^{(i)} = d.$$

Definición (Ideal homogéneo con peso)

Diremos que el ideal $I \lhd k_a[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ *es* **homogéneo con peso a**, *si es generado por elementos homogéneos con peso a.*

Definición (Ideal homogéneo con peso)

Diremos que el ideal $I \lhd k_a[x_0, \dots, x_{n+1}]$ *es* **homogéneo con peso a**, *si es generado por elementos homogéneos con peso a.*

Definición (Variedad Proyectiva con peso)

Sea $I \lhd k_a[x_0, \dots, x_{n+1}]$ *un ideal homogéneo con peso. Se define la variedad proyectiva con peso asociada a* I *como*

$$V(I) = \{p \in \mathbb{P}(a) \ : \ f(p) = 0, \ \forall f \in I\}.$$

Definición

Sea $V \subset \mathbb{P}(a)$. Se define el **ideal asociado** *a V como*

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in k_a[x_0, \ldots, x_{n+1}] \ : f(p) = 0, \ \forall \ p \in V \ y$$
$$f \ \ es \ \ homogneo \ \ con \ \ peso \ \ a\}.$$

Definición

Sea $V \subset \mathbb{P}(a)$. Se define el **ideal asociado** *a V como*

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in k_a[x_0, \ldots, x_{n+1}] \ : f(p) = 0, \ \forall \ p \in V \ y \\ f \ es \ homogneo \ con \ peso \ a\}.$$

Definición (Cono Afín)

Sea $X = V(f) \subset \mathbb{P}(a)$ una hipersuperficie. El **Cono afín** *C_X de X está definido como*

$$C_X = \{x \in \mathbb{A}^{n+2} : f(x) = 0\}$$

Definición

Sea $V \subset \mathbb{P}(a)$. *Se define el* **ideal asociado** *a* V *como*

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in k_a[x_0, \dots, x_{n+1}] \ : f(p) = 0, \ \forall\ p \in V \ y \\ f \ es \ homogneo \ con \ peso \ a\}.$$

Definición (Cono Afín)

Sea $X = V(f) \subset \mathbb{P}(a)$ *una hipersuperficie. El* **Cono afín** C_X *de* X *está definido como*

$$C_X = \{x \in \mathbb{A}^{n+2} : f(x) = 0\}$$

Si $C_X - \{0\}$ *es suave, diremos que* X *es* **casi-suave**

Tenemos la generalización del teorema de Matsumura y Monsky:

Tenemos la generalización del teorema de Matsumura y Monsky:

Teorema (2.1 y 3.1, [Ess23])

Sean $X \subset \mathbb{P}(a)$ y $X' \subset \mathbb{P}(a')$ hipersuperficies casi-suaves bien-formadas de grado d y d', respectivamente. Supongamos que X no es un cono lineal y sea $\tau : X \to X'$ un isomorfismo.

Tenemos la generalización del teorema de Matsumura y Monsky:

Teorema (2.1 y 3.1, [Ess23])

Sean $X \subset \mathbb{P}(a)$ y $X' \subset \mathbb{P}(a')$ hipersuperficies casi-suaves bien-formadas de grado d y d', respectivamente. Supongamos que X no es un cono lineal y sea $\tau : X \to X'$ un isomorfismo.

(*i*) *Si $n \geq 3$, o $n = 2$ y $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \neq d$, entonces $d = d'$, $a = a'$ bajo reordenamiento y τ es la restricción de un automorfismo de $\mathbb{P}(a)$. En particular, $Aut(X) = Lin(X)$.*

Tenemos la generalización del teorema de Matsumura y Monsky:

Teorema (2.1 y 3.1, [Ess23])

Sean $X \subset \mathbb{P}(a)$ y $X' \subset \mathbb{P}(a')$ hipersuperficies casi-suaves bien-formadas de grado d y d', respectivamente. Supongamos que X no es un cono lineal y sea $\tau : X \to X'$ un isomorfismo.

(*i*) *Si $n \geq 3$, o $n = 2$ y $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \neq d$, entonces $d = d'$, $a = a'$ bajo reordenamiento y τ es la restricción de un automorfismo de $\mathbb{P}(a)$. En particular, $Aut(X) = Lin(X)$.*

(*ii*) *El grupo $Lin(X)$ es finito si y sólo si $d > 2\ mx(a)$, o $d = 2\ mx(a)$ y el máximo es alcanzado solo en un a_i.*

Problema principal de tesis

- Generalizar los resultados presentados sobre el grupo de automorpismos de hipersuperficies suaves del espacio proyectivo a hipersuperficies casi-suaves del espacio proyectivo con pesos.

Problema principal de tesis

- Generalizar los resultados presentados sobre el grupo de automorpismos de hipersuperficies suaves del espacio proyectivo a hipersuperficies casi-suaves del espacio proyectivo con pesos.
- Como primer paso, queremos generalizar el resultado para el orden de un automorfismo de una hipersuperficie suave en un espacio proyectivo al caso del espacio proyectivo con pesos.

En particular, tenemos como primera tarea de la tesis, demostrar la siguiente conjetura

En particular, tenemos como primera tarea de la tesis, demostrar la siguiente conjetura

Conjetura

Sean n, d, p enteros positivos, con p primo, y sea $a \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+2}$. Si p es el orden de un automorfismo F-liftable de una hipersuperficie casi-suave de $\mathbb{P}_a^{n+2}$, entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:

(*i*) *d es divisible por $a_i p$, para algún $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$.*

(*ii*) *$d - a_j$ es divisible por $a_i p$, para algún $i, j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ con $i \neq j$.*

(*iii*) *Existe $I \subset \{0, 1, \ldots, n+1\}$ tal que*

$$\prod_{i \in I}(d - a_i) \equiv (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} a_i \ mod \ p.$$

Proposición (2.2, [GAL13])

Sean $n \geq 2$ *y* $d \geq 3$ *enteros tales que* $(n, d) \neq (2, 4)$*. Un número primo* p *es el orden de un automorfismo de una hipersuperficie suave de dimensión* n *y grado* d *si y sólo si se cumple una de las siguientes afirmaciones*

(i) d *es divisible por* p.

(ii) $d - 1$ *es divisible por* p.

(ii) *Existe* $\ell \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$ *tal que*

$$(1-d)^{\ell} \equiv 1 \text{ mod } p.$$

Referencias I

Donal O'Shea David A. Cox, John Little.
Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
Undergraduate texts in mathematics. Springer, 3rd ed edition, 2007.

Louis Esser.
Automorphisms of weighted projective hypersurfaces, 2023.

William Fulton.
Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.
3 edition, 2008.

Víctor González-Aguilera and Alvaro Liendo.
On the order of an automorphism of a smooth hypersurface.
Israel J. Math., 197(1):29–49, 2013.

Referencias II

Víctor González-Aguilera, Alvaro Liendo, and Pedro Montero.
On the liftability of the automorphism group of smooth hypersurfaces of the projective space, 2021.

Víctor González-Aguilera, Alvaro Liendo, Pedro Montero, and Roberto Villaflor Loyola.
On a torelli principle for automorphisms of klein hypersurfaces, 2023.

Timothy Hosgood.
An introduction to varieties in weighted projective space, 2020.

Hideyuki Matsumura and Paul Monsky.
On the automorphisms of hypersurfaces.
Journal of Mathematics of Kyoto University, 3(3):347 – 361, 1963.

Referencias III

R. Moraru.
Introduction to algebraic geometry.
In *Compact courses notes*. Pure Math 764, Winter 2014, 2014.

Keiji Oguiso and Xun Yu.
Automorphism groups of smooth quintic threefolds, 2015.

Daniel Perrin.
Algebraic geometry.
Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2008.
An introduction, Translated from the 1995 French original by Catriona Maclean.

Li Wei and Xun Yu.
Automorphism groups of smooth cubic threefolds, 2019.

Muchas Gracias!