Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca

Resolución simultánea de deformaciones degeneradas μ-constantes

Gonzalo Rodriguez Ugarte
Director: Dr. Maximiliano Leyton Álvarez

13 de octubre de 2023

Poliedro de Newton

Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ con notación multi-índice.

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}} a_m x^m$$

Ejemplo

Sea $f = x^5 + y^6 + z^5 + y^3 z^2$. En tal notación f se escribe:

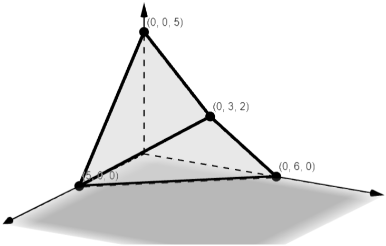
$$f = x^{(5,0,0)} + x^{(0,6,0)} + x^{(0,0,5)} + x^{(0,3,2)}$$

Poliedro de Newton

Considere $f = x^{(5,0,0)} + x^{(0,6,0)} + x^{(0,0,5)} + x^{(0,3,2)}$.

Se define el poliedro de Newton de f

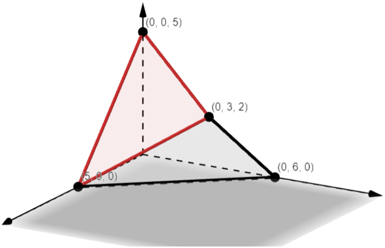
$$\boxed{\Gamma_+(f) = Conv\left(\bigcup_{a_m \neq 0} m + \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}\right)}$$



$\Gamma_+(f)$

Condición de No-degeneración

El polinomio f es llamado Newton no-degenerado si para cada cara compacta γ, las derivadas parciales $\partial_1 f_\gamma, \ldots, \partial_{n+1} f_\gamma$ no tienen un cero común en $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+1}$.



$$f_\gamma = x^5 + z^5 + y^3 z^2.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial x} = 5x^4.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial y} = 3y^2 z^2.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial z} = 5z^4 + 2y^3 z.$$

Deformación degenerada

Una deformación degenerada de f es

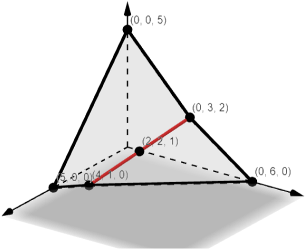
$$\begin{aligned} F_s(x,y,z) &= x^5 + y^6 + z^5 + y^3z^2 + 2sx^2y^2z + s^2x^4y \\ &= x^5 + y^6 + z^5 + y(y^2z^2 + sx^2)^2 \end{aligned}$$

Conocido como el ejemplo de Altman por ser $\mu-$constante.

$$\mu(F_s) = \mu(f) = 68$$

Deformación degenerada

En efecto, para $F_s = x^5 + y^6 + z^5 + y(y^2z^2 + sx^2)^2$ se tiene:



$$
\begin{aligned}
F_\gamma &= y(y^2z^2 + sx^2)^2.\\
\frac{\partial F_\gamma}{\partial x} &= 4sxy(y^2z^2 + sx^2).\\
\frac{\partial F_\gamma}{\partial y} &= (y^2z^2 + sx^2)^2 + 4y^2z^2(y^2z^2 + sx^2).\\
\frac{\partial F_\gamma}{\partial z} &= 4y^3z(y^2z^2 + sx^2).
\end{aligned}
$$

Tipo Topológico

Los gérmenes de hipersuperficies $(V_1, p_1) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, p_1)$, $(V_2, p_2) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, p_2)$ tienen el mismo tipo topológico si existe un homeomorfismo $\xi : (\mathbb{C}^{n+1}, p_1) \to (\mathbb{C}^{n+1}, p_2)$ tal que $\xi(V_1) = V_2$.

Una deformación W de una hipersuperficie V se dice Topológicamente trivial si tiene el mismo tipo topológico que V.

Conjetura de Lê-Ramanujam

Teorema (Lê, Ramanujam 76')

Sea W es una deformación de una hipersuperficie $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Cuando $n \neq 2$ se tiene que si W es una deformación μ-constante si y sólo si W es topológicamente trivial.

Ellos conjeturan que el teorema es cierto para el caso $n = 2$.

Resolución simultánea (Caso No-degenerado)

Proposición

Sea W una deformación de V dada por F. Si W admite un resolución simultánea incrustada entonces:

(1) La deformación W es topológicamente trivial.

(2) La deformación W es $\mu-$constante.

Teorema (Leyton,Mourtada,Spivakovsky 22')

Si W es una deformación Newton no-degenerada. La deformación W es μ-constante si y sólo si W admite una resolución simultánea incrustada.

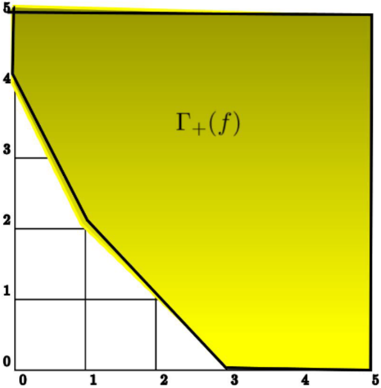
Problema 1

Pregunta

*Sea W una deformación Newton **degenerada** y μ-constante. ¿W admite resolución simultánea incrustada?*

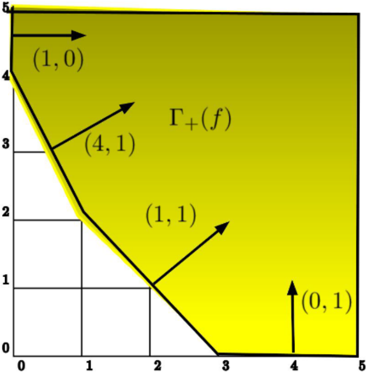
A partir del poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ es posible definir un abanico $\Gamma^*(f)$ subdivisión del cono estándar Δ.

Por ejemplo, para $f = x^{(3,0)} + x^{(1,2)} + x^{(0,4)} = x^3 + xy^2 + y^4$



Poliedro y Estallido de Newton

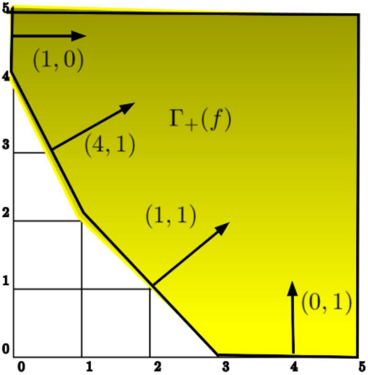
Considere los vectores normales a las caras de $\Gamma_+(f)$



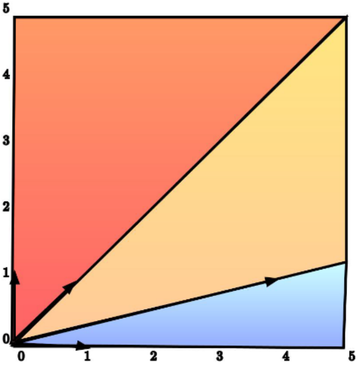
$\Gamma_+(f)$

Poliedro y Estallido de Newton

Considere los vectores normales a las caras de $\Gamma_+(f)$



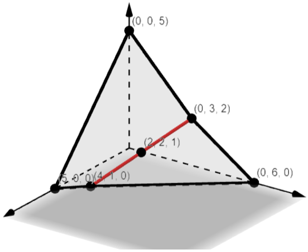
$\Gamma_+(f)$

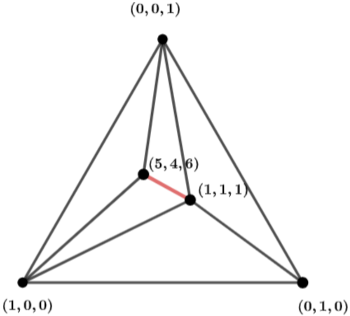


$\Gamma^*(f)$

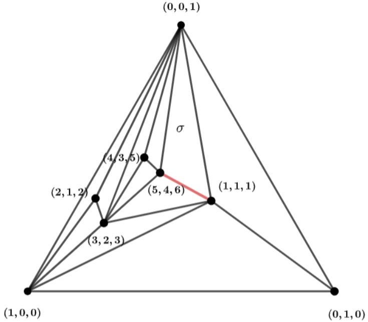
Ejemplo

Para $\Gamma_+(F_s)$ se tiene:





Subdivisión Regular y morfismo tórico



$$\sigma = \langle (5,4,6), (1,1,1), (0,0,1) \rangle$$

$$U_\sigma \cong \mathbb{C}^3 \rightarrow \quad \mathbb{C}^3$$

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1^5 y_2, y_1^4 y_2, y_1^6 y_2 y_3)$$

Transformadas total y estricta de F_s

Bajo el morfismo $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1^5 y_2, y_1^4 y_2, y_1^6 y_2 y_3)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} F_s &= x^5 + y^6 + z^5 + y(y^2 z^2 + s x^2)^2 \\ &= y_1^{24} y_2^5 (y_1 + y_2 + y_1^6 y_3^5 + (s + y_3)^2) \end{aligned}$$

Note que la transformada estricta descrita por

$$g_s = y_1 + y_2 + y_1^6 y_3^5 + (s + y_3)^2 = 0$$

es no singular pues $\partial_{y_2} g_s = 1$

Newton degenerado y no-degenerado

En la deformación $F_s = x^5 + y^6 + z^5 + (y^3 z^2 + 2s x^2 y^2 z + s^2 x^4 y)$ podemos agregar un parámetro $r \in B_\epsilon(0)$ para romper la degeneración.

$$F'_s = x^5 + y^6 + z^5 + (y^3 z^2 + (2s + r) x^2 y^2 z + s^2 x^4 y)$$

Note que el poliedro de Newton no cambia, entonces el polinomio asociado a la cara degenerada quedaría

$$F'_\gamma = (y^3 z^2 + (2s + r) x^2 y^2 z + s^2 x^4 y)$$

Cuyas derivadas parciales son:

$$\partial_x F'_\gamma = 2(2s+r)xy^2z + 4s^2x^3y$$
$$\partial_y F'_\gamma = 3y^2z^2 + 2(2s+r)x^2yz + s^2x^4$$
$$\partial_z F'_\gamma = 2y^3z + (2s+r)x^2y^2$$

Luego, la cara γ es No-degenerada.

Plan a seguir

- Considerar la deformación W' Newton No-degenerada dada por F'_s.
- W' admite resolución simultánea incrustada.
- Por el Teorema de Isotopía de Thom. Existe una trivialización para W'.
- ¿Tal trivialización depende del parámetro r?
- Estudiar la trivialización cuando $r \to 0$.

Otra Pregunta

Pregunta

¿Es posible dar una descripción clara de las deformaciones μ-constantes degeneradas?

Muchas Gracias!