



Coloquio Inst-Mat  
Instituto de Matemáticas  
Universidad de Talca  
Campus Lircay S/N, Talca-Chile

---

## Contando puntos algebraicos en curvas.

Matías Alvarado\*

### Abstract

Uno de los problemas centrales en geometría diofántina es el estudio de puntos algebraicos y racionales de variedades algebraicas definidas sobre cuerpos de números. En general, este es un problema difícil, y la evidencia establece que los invariantes geométricos gobiernan el comportamiento de dichos puntos. Para el caso de curvas proyectivas, el género es el invariante que nos ayuda a entender el conjuntos de puntos racionales.

Sea  $X$  una curva proyectiva suave definida sobre un cuerpo de números  $k$ , y  $L/k$  una extensión finita. Si el género es 0, entonces  $X(L)$  es infinito o vacío. Si el género es 1, entonces  $X(L)$  es un grupo llamado el grupo de Mordell-Weil, el cual puede ser finito o infinito. Finalmente el teorema de Faltings, establece que si el género es 2, entonces  $X(L)$  es un conjunto finito. Esto nos da una clasificación del comportamiento de puntos racionales sobre curvas dependiendo del género.

Por otra parte, uno puede preguntarse por todos los puntos algebraicos que vivan en extensiones de  $k$  de algún grado fijo. Por ejemplo si  $X$  es una curva hiperelíptica dada por  $y^2 = f(x)$ , siendo  $f$  el cubrimiento doble de  $X$  en  $\mathbb{P}^1$ , entonces para cada  $t$  en  $\mathbb{P}^1$ , el punto  $(t, \sqrt{t})$  es un punto cuadrático (para casi todo  $t$ ). Inspirados en este ejemplo, dado una curva algebraica  $X$  con un morfismo  $f$  a  $\mathbb{P}^1$ , nos preguntamos cuáles puntos algebraicos de un grado fijo (sobre  $k$ ) tienen imagen del mismo grado via el morfismo  $f$ . A principio de los 90s, Vojta estudió estos puntos y dió condiciones en el género, el grado de los puntos y el grado del morfismo para asegurar la finitud de dichos puntos. Fuera de esas condiciones podemos encontrar ejemplos con una infinidad de puntos algebraicos de este tipo.

En esta charla estudiaremos como contar estos puntos en función de la altura.

---

\*e-mail: [matias.alvarado.torres1@gmail.com](mailto:matias.alvarado.torres1@gmail.com)