Ecuaciones elípticas degeneradas fraccionarias

Iván Proaño

Universidad de Talca

14 de enero de 2026

En *A singular Sturm-Liouville equation under homogeneous boundary conditions* (2011) por Hernán Castro y Hui Wang, se aborda el problema

$$\begin{cases} -(x^{2\alpha}u'(x))' + u(x) &= f(x) \quad \text{en } (0,1], \\ u(1) &= 0, \end{cases} \tag{SL+}$$

donde α es un número real positivo y $f \in L^2(0,1)$.

En el trabajo *Ecuaciones singulares de Sturm-Liouville*, como trabajo de magister en 2024. Se abordó el caso $\alpha < 1$, salvo ciertos valores críticos.

Teoria L^p para una ecuación singular de Sturm-Lioville

Objetivos

Buscamos estudiar el problema

$$\begin{cases} -(x^{2\alpha}u'(x))' + u(x) &= f(x) \quad \text{en } (0,1], \\ u(1) &= 0, \end{cases} \tag{SL}$$

donde α es un número real y $f \in L^p(0,1)$.

Teorema 1 (Problema Dirichlet)

Dados $\alpha < \frac{1}{2}$ *y* $f \in L^p(0,1)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *entonces existe* $u_{\boldsymbol{D}} \in W^{2,p}_{loc}(0,1]$ *que verifica (SL) c.t.p. con las siguientes propiedades*

(i) $x^{2\alpha}u'_{\boldsymbol{D}} \in W^{1,p}(0,1)$ *con* $\|x^{2\alpha}u'_{\boldsymbol{D}}\|_{W^{1,p}} \leq C\|f\|_{L^p}$,

(ii) $x^{2\alpha-1}u_{\boldsymbol{D}} \in W^{1,p}$ *con* $\|x^{2\alpha-1}u_{\boldsymbol{D}}\|_{W^{1,p}} \leq C\|f\|_{L^p}$,

(iii) $x^{2\alpha}u_{\boldsymbol{D}} \in W^{2,p}(0,1)$ *con* $\|x^{2\alpha}u_{\boldsymbol{D}}\|_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_{L^p}$.

(iv) $\lim\limits_{x \to 0^+} u_{\boldsymbol{D}}(x) = 0$, *como* $|x^{2\alpha-1}u_D| \leq Cx^{\frac{1}{p}}$

Adicionalmente,

(v) $u_{\boldsymbol{D}} \in C^{0,\frac{1}{2}-\alpha}[0,1]$ *con* $\|u_{\boldsymbol{D}}\|_{C^{0,\frac{1}{2}-\alpha}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *cuando* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

(vi) $u_{\boldsymbol{D}} \in C^{0,\frac{1}{2}}[0,1]$ *con* $\|u_{\boldsymbol{D}}\|_{C^{0,\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *cuando* $\alpha < 0$

Teorema 2 (Problema Neumann)

Dados $\alpha < 1$ *y* $f \in L^p(0,1)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Existe* $u_{\boldsymbol{N}} \in W^{2,p}_{loc}(0,1]$ *que verifica (SL) con las siguientes propiedades*

(i) $\lim_{x \to 0^+} x^{2\alpha - 1 + \frac{1}{p}} u'_{\boldsymbol{N}}(x) = 0$,

(ii) $x^{2\alpha-1} u'_{\boldsymbol{N}} \in L^p(0,1)$ *y* $x^{2\alpha} u'' \in L^p(0,1)$, *con* $\|x^{2\alpha-1} u'_{\boldsymbol{N}}\|_{L^p} + \|x^{2\alpha} u''\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$. *En particular,* $x^{2\alpha} u'_{\boldsymbol{N}} \in W^{2,p}(0,1)$. *Adicionalmente,*

(iii) $u_{\boldsymbol{N}} \in C^{0,\frac{1}{2}-\alpha}[0,1]$ *con* $\|u_{\boldsymbol{N}}\|_{C^{0,\frac{1}{2}-\alpha}} \leq \|f\|_{L^p}$, *si* $0 < \alpha < 1$.

(iv) $u_{\boldsymbol{N}} \in W^{1,p}(0,1)$ *con* $\|u_{\boldsymbol{N}}\|_{W^{1,p}} \leq \|f\|_{L^p}$, *s i* $\alpha \leq 0$

Espacio Ambiente

Para $\alpha < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$X^{\alpha,p} = \left\{ u \in W^{1,p}_{loc}(0,1) \,:\, u \in L^p(0,1),\, x^\alpha u' \in L^p(0,1) \right\}.$$

Particularme, con $p = 2$ denotamos al espacio de Hilbert X^α equipado del producto interior

$$(u, v)_\alpha = \int_0^1 \left(x^{2\alpha} u'(x) v'(x) + u(x) v(x) \right) dx,$$

Proposición 1 (($\star$) Castro y Wang)

Para $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ el espacio $X^{\alpha,p}$ está continuamente incluido en

(i) $C^{0,1-\frac{1}{p}-\alpha}[0,1]$, *si* $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ *y* $p \neq 1$,

(ii) $L^q(0,1)$ *para todo* $q < \infty$ *si* $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$,

(iii) $L^{\frac{p}{p\alpha - p + 1}}(0,1)$, *si* $1 - \frac{1}{p} < \alpha \leq 1$ *y* $p \neq \infty$

En general, $X^\alpha \hookrightarrow H^1_{loc}((0,1])$, lo que permite definir el espacio

$$X^\alpha_{\cdot\, 0} = \{u \in X^\alpha \;:\; u(1) = 0\}$$

Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $X^\alpha \subset C^{\frac{1}{2}-\alpha}[0,1]$ y para $\alpha < 0$, $X^\alpha \subset C[0,1]$. Por lo tanto, para $\alpha < \frac{1}{2}$ podemos definir el subespacio

$$X^\alpha_{00} = \{u \in X^\alpha \;:\; u(1) = u(0) = 0\}.$$

Existencia de Soluciones

Consideraremos las soluciones débiles del problema como las soluciones de

$$\int_0^1 (\, x^{2\alpha} u' v' + uv \,)\, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad \forall v \in X,$$

Definamos el operador $T_f(u) = \int_0^1 u(x) f(x) dx$
Por la proposición $(\star)$ tenemos:

- Si $\alpha < \frac{1}{2}$, $X^\alpha \hookrightarrow L^\infty$.
- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $X^\alpha \hookrightarrow L^q(0,1)$ para $1 \leq q < \infty$.
- Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $X^\alpha \hookrightarrow L^q(0,1)$ para $1 \leq q \leq \frac{2}{2\alpha - 1}$.

Así, existen soluciones para los siguientes valores p:

- Si $\alpha < \frac{1}{2}$, $1 \leq p \leq \infty$.
- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $1 < p \leq \infty$.
- Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $\frac{2}{3 - 2\alpha} \leq p \leq \infty$.

Con

$$\|u\|_{X^\alpha} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p} \qquad \forall q, \text{ tal que } X^\alpha \hookrightarrow L^q.$$

Casos especiales

Falta existencia para:

- $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = 1$.
- $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \frac{2}{3-2\alpha}$

Nos falta acotar u para:

- $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = 1$.
- $\alpha = \frac{1}{2}$ y $p = \infty$
- $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$.

Existencia: caso $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ y $1 \leq p < \frac{2}{3-2\alpha}$

Proposición 2

Sean $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ *y* $g \in L^s$ *con* $s > \frac{1}{1-\alpha}$ *entonces existe* $w \in X^{\alpha}_{\cdot 0}$ *solución de*

$$-(x^\alpha w')' + w = -(x^\alpha g)' \quad \textit{en } (X^{\alpha}_{\cdot 0})^*$$

que satisface $\|w\|_{L^\infty} \leq C\|g\|_{L^s}$

Podemos asegurar la existencia de $u \in X^{q}_{\cdot 0}$,solución de nuestro problema, para cualquier $1 \leq q < \frac{1}{\alpha}$ tal que

$$\|u\|_{X^{\alpha,q}_{\cdot 0}} \leq C\|f\|_{L^p},$$

En particular, $\|u\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$, Tomando $f_n \in L^2$ tal que $f_n \to f$ en L^p, existen u_n soluciones de (SL) para las cuales usamos $\psi = u_n - u_m$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x^\alpha \psi' g \right| &= \left| \int_0^1 x^{2\alpha} w' \psi' + \int_0^1 w\psi \right| \\ &= \left| \int_0^1 (-(x^{2\alpha}\psi')' + \psi) w \right| \\ &\leq \|g\|_{L^s} \|f_n - f_m\|_{L^p} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x^\alpha \psi'\|_{L^{s'}} \leq C \|f_n - f_m\|_{L^p}$$

Así, (u_n) es de Cauchy en $X_0^{\alpha,s'}$. Pasando al límite, $\|u\|_{X_0^{\alpha,q}} \leq C\|f\|_{L^p}$ para cualquier $1 \leq q < \frac{1}{\alpha}$.

Sketch de los resultados

Para ambos problemas es necesario tener la desigualdad $\|u\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$. Rescatamos la siguiente desigualdad

$$\int_0^1 |x^{2\alpha-1}u'|^p \, dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x |w'(s)| \, ds\right)^p dx \leq C\|w'\|_{L^p}^p \qquad (\star)$$

denotando $w = x^{2\alpha}u'$ para cualquier $1 < p \leq \infty$ en el caso Neumann.

Caso $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \frac{2}{3-2\alpha}$

Para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, se cumple que $\frac{2}{3-2\alpha} < \frac{2}{2\alpha-1}$.
Analizaremos la situación por casos.
Si $\frac{2}{3-2\alpha} \leq p \leq \frac{2}{2\alpha-1}$: como $X^\alpha \subset L^q(0,1)$ para todo $q \leq \frac{2}{2\alpha-1}$, se sigue que

$$\|u\|_{L^p} \leq C_\alpha \|u\|_{X^\alpha} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Si $\frac{2}{3-2\alpha} < \frac{2}{2\alpha-1} < p$: por $(\star)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x^{2\alpha-1}u'\|_{L^{\frac{2}{2\alpha-1}}} &\leq C_p \left(\|u\|_{\frac{2}{2\alpha-1}} + \|f\|_{\frac{2}{2\alpha-1}} \right) \\ &\leq C_\alpha \left(\|u\|_{X^\alpha} + \|f\|_{L^p} \right) \\ &\leq C\|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Así, $x^{2\alpha-1}u' \in L^{\frac{2}{2\alpha-1}}$ y $u \in L^{\frac{2}{2\alpha-1}}$, por lo tanto, $u \in X^{2\alpha-1,\frac{2}{2\alpha-1}}$, y verifica $\|u\|_{X^{2\alpha-1,\frac{2}{2\alpha-1}}} \leq C\|f\|_{L^p}$. Además, se tiene lo siguiente

$$u \in X^{2\alpha-1,\frac{2}{2\alpha-1}} \subset \begin{cases} L^q(0,1) & \text{para todo } q < \infty & \text{si } \alpha \leq \frac{5}{6} \\ L^q(0,1) & \text{para todo } q \leq \frac{2}{6\alpha-5} & \text{si } \frac{5}{6} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Si $\alpha \leq \frac{5}{6}$ se verifica $\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{X^{2\alpha-1,\frac{2}{2\alpha-1}}} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Notemos que, para $\frac{5}{6} < \alpha < 1$, $\frac{2}{2\alpha-1} < \frac{2}{6\alpha-5}$.

El paso no es infinito pues para cada $\alpha < 1$ existe n tal que $\alpha < \frac{4n+1}{4n+2}$.

Problema de extensión para operadores fraccionarios

Recordemos que el Laplaciano fraccionario de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se expresa mediante la fórmula

$$(-\Delta)^s f(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(\xi)}{|x - \xi|^{n+2s}} \, d\xi. \tag{1}$$

donde $0 < s < 1$, y $C_{n,s}$ es una constante de normalización.

Caffarelli y Silvestre [7] trabajan el problema de extensión:

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Mostrando que

$$C(-\Delta)^s f = \lim_{y \to 0^+} y^a u_y = \frac{1}{1-a} \lim_{y \to 0^+} \frac{u(x,y) - u(x,0)}{y^{1-a}},$$

para $s = \frac{1-a}{2}$ y alguna constante C (dependiendo de n y s).

Caffarelli y Stinga [9] estudian el problema de extención $Lu = -\text{div}_x(A(x)\nabla_x u)$ donde los coeficientes $A(x)$ son simétricos y uniformemente elípticos.
En [9] se estudia el problema de extensión

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(y^a B(x)\nabla U\big) = 0, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ U = 0, & \text{en } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ U(x,0) = u(x), & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

donde

$$B(x) := \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \qquad \text{y} \qquad a := 1-2s \in (-1,1). \tag{4}$$

Entonces, se tiene

$$-\frac{1}{2s} \lim_{y\to 0^+} y^a U_y(x,y) = -\lim_{y\to 0^+} \frac{U(x,y)-U(x,0)}{y^{2s}} = c_s\, L^s u(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

Nuestro operador de interés es:

$$Lu = -\mathsf{div}_x(|x|^\alpha \nabla_x u)$$

En [7]

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(y^a B(x)\nabla U\big) = \operatorname{div}\big(y^a F\big), & \text{en } B_1^* = B_1 \times (0,1), \\ -y^a U_y\big|_{y=0} = f, & \text{en } B_1, \end{cases} \tag{6}$$

donde que

$$F_i(x) \in L^2(B_1^*, y^a dX), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{y} \qquad F_{n+1} = 0.$$

y $U \in H^1(B_1^*, y^a dX)$ es una solución débil de (6) si

$$\int_{B_1^*} y^a B(x)\nabla U \cdot \nabla\psi \, dX = \int_{B_1^*} y^a F \cdot \nabla\psi \, dX + \int_{B_1} \psi(x,0)\, f(x)\, dx, \tag{7}$$

para toda $\psi \in H^1(B_1^*, y^a dX)$ tal que $\psi = 0$ en $\partial B_1^* \setminus (\overline{B_1} \times \{0\})$.

Lema 3 (Desigualdad de Caccioppoli)

[9, Lemma 3.2] *Sea U una solución débil de (6). Para toda $\eta \in C_c^\infty(B_1^*)$ que se anula en $\partial B_1^* \setminus (\overline{B_1} \times \{0\})$, se tiene*

$$\int_{B_1^*} y^a \eta^2 |\nabla U|^2 \, dX \le C \left(\int_{B_1^*} y^a \left(|\nabla \eta|^2 U^2 + |F|^2 \eta^2 \right) dX + \int_{B_1} \eta(x,0)^2 \, |U(x,0)| \, |f(x)| \, dx \right),$$

donde $C = C(\lambda, \Lambda)$.

Proposición 3

[9, Proposición 3.5] *Sea* $W \in H^1(B_1^*, y^a\, dX)$ *una solución débil de*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla W) = 0, & \text{en } B_1^*, \\ -\, y^a W_y\big|_{y=0} = 0, & \text{en } B_1. \end{cases}$$

1. *Para cada entero* $k \geq 0$ *y cada bola* $B_r(x_0) \subset B_1$,

$$\sup_{B_{r/2}(x_0)\times(0,r/2)} \left|D_x^k W\right| \;\leq\; \frac{C}{r^k}\, \operatorname{osc}_{B_r(x_0)\times(0,r)} W,$$

   donde la constante C *depende únicamente de* n, k *y* s.

2. *Para cada* $B_r(x_0) \subset B_1$,

$$\max_{B_{r/2}(x_0)\times(0,r/2)} |W| \;\leq\; M \left(\frac{1}{r^{n+1+a}} \int_{B_r(x_0)^*} y^a\, |W|^2\, dX \right)^{1/2},$$

   donde la constante M *depende únicamente de* n *y* s.

Regularidad de segundo orden para ecuaciones elípticas con peso

Como primer paso, estudiaremos la regularidad de la ecuación

$$-\mathrm{div}(|x|^a \nabla v) = |x|^a f$$

en B_1, trabajando en $\mathbb{R}^N$.
Para ello consideremos una solución débil $u \in H_0^1(B_1, |x|^a dx)$ del problema, i.e.,

$$\int_\Omega |x|^a \nabla v \nabla \phi \, dx = \int_\Omega |x|^a f v \, dx \qquad \forall \, \phi \in H_0^{1,w}$$

Teorema 4

Sea u solución débil de

$$-\mathit{div}(|x|^a \nabla v) = |x|^a f \quad \text{\textit{en} } B_4$$

Si $N + a - 4 > 0$, entonces $u \in H^2(B_1, |x|^a dx)$ tal que

$$||D^2 u||_{L^{2,w}(B_1)} \leq C \left(||\nabla u||_{L^{2,w}(B_4)} + ||f||_{L^{2,w}(B_4)} \right).$$

Escalamiento

Para $R < 1$ tenemos que $v(x) = u(Rx)$ es solución débil de

$$-\text{div}(|x|^a \nabla v) = R^2 |x|^a f(Rx) \quad \text{en } B_{4/R}$$

Trabajando en $B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}$, usando la función test $\phi = -\partial_i(\eta^2 |x|^a \partial_i v)$, tenemos

$$\int_{B_{\frac{3}{2}} \setminus B_1} |x|^{2a} \left|D^2 v\right|^2 dx \leq C \int_{B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}} \left(|x|^{2a-2} + |x|^{2a}\right) |\nabla v|^2 + C R^4 \int_{B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}} |x|^{2a} |f(Rx)|^2 dx$$

Recuperando el cambio de variable $v(x) = u(Rx)$ tenemos que

$$\int_{B_{\frac{3R}{2}} \setminus B_R} |x|^a \left|D^2 u\right|^2 dx \leq C \int_{B_{2R} \setminus B_{\frac{R}{2}}} |x|^{a-2} |\nabla u|^2 + C \int_{B_{2R} \setminus B_{\frac{R}{2}}} |x|^a |f|^2.$$

Con $R = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en el lado derecho de la desigualdad tenemos una colección de anillos que se superponen sobre $B_{4/3}$ con multiplicidad acotada por 4, i.e., cada punto de $B_{3/4}$ pertenece como máximo a cuatro anillos. En el lado izquierdo, en cambio, tenemos una colección de anillos que se van uniendo uno tras otro hasta formar B_1. Así,

$$\int_{B_1} |x|^a \, |D^2 u|^2 \, dx \leq C \int_{B_{\frac{4}{3}}} |x|^{a-2} \, |\nabla u|^2 + C \int_{B_{\frac{4}{3}}} |x|^a \, |f|^2. \tag{8}$$

Lema 5

Sea $u \in H^{1,a}(B_4)$ *una solución débil de*

$$-\operatorname{div}(|x|^a \nabla u) = |x|^a f \quad \textit{en } B_4,$$

para algún $a \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $\gamma < 0$, $f \in L^{p,w}(B_4)$, $\epsilon > 0$ *y que* $N + a + \gamma - 2 > 0$..
Entonces existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\int_{B_2} |x|^{a+\gamma} |\nabla u|^2 - \frac{\gamma}{2}(N + a + \gamma - 2) \int_{B_2} |x|^{a+\gamma-2} u^2 \leq C \left(\int_{B_4} |x|^a |f|^p + \epsilon \int_{B_4} |x|^{a+p'\gamma} |u|^{p'} + \int_{B_4 \setminus B_2} |x|^{a+\gamma-1} u^2 \right).$$

La aplicación del Lema, resulta de usar $\gamma = -2$, $N + a - 4 > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que $K = N + a - 4 - C\epsilon \geq 0$. Así,

$$\int_{B_2} |x|^{a-2}|\nabla u|^2 + K \int_{B_2} |x|^{a-4}u^2 \leq C \left(\int_{B_4} |x|^a |f|^2 + \int_{B_4 \setminus B_2} |x|^{a-3}u^2 \right). \quad (9)$$

juntando (8) y (9) tenemos

$$\int_{B_1} |x|^a \, |D^2 u|^2 \, \leq C \int_{B_4} x^{a-2}u^2 + C \int_{B_4} |x|^a |f|^2$$

. Usando la desigualdad de Hardy

$$\int_{B_4} x^{a-2}u^2 \leq C \int_{B_4} x^a |\nabla u|^2$$

tenemos el resultado.

Futuro trabajo

- Un próximo resultado será adaptar la parte 2 de prop mediante una iteración de Moser
- Como un segundo problema elíptico, estudiaremos

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(|y|^b|x|^a\nabla U\big) = 0, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ U = 0, & \text{en } \partial\Omega \times [0,\infty). \end{cases} \tag{10}$$

- Y una tercera ecuación,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(y^b|x|^a\nabla U\big) = 0, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ U = 0, & \text{en } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ -y^a U_y\big|_{y=0} = f, & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{11}$$

reescrita como

$$y^{-b}\partial_y(y^b u_y) = \mathrm{div}_x(y^b|x|^a\nabla_x u) := \tilde{f}(x,y).$$

Gracias por su atención

Referencias I

[1] Hernán Castro and Hui Wang, *A singular Sturm–Liouville equation under homogeneous boundary conditions*, J. Functional Analysis **261** (2011), no. 6, 1542–1590.

[2] ______, *A singular Sturm–Liouville equation under non-homogeneous boundary conditions*, Differential Integral Equations **25** (2012), no. 1–2, 85–92.

[3] James Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. **111** (1964), 247–302.

[4] George N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[5] Anton Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 121, American Mathematical Society, 2005.

[6] Hernán Castro and Iván Proaño, *L^p theory for a singular Sturm–Liouville equation*, 2024.

[7] Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Commun. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 8, 1245–1260.

[8] Pablo R. Stinga and José L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Commun. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 11, 2092–2122.

[9] Luis Caffarelli and Pablo Stinga, *Fractional elliptic equations, Caccioppoli estimates and regularity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **33** (2016), no. 3, 767–807.