



Black hole solutions in modified gravity theories: structure and thermodynamics.

Ulises Hernández Vera

Tesis presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias, Mención Matemáticas

Director de Tesis: Prof. Mokhtar Hassaine

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca

1 de junio de 2026

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	6
1. Relatividad General y sus soluciones Clásicas	10
1.1. Preliminares geométricos	11
1.1.1. Formulación lagrangiana de la Relatividad General	12
1.1.2. Simetrías del espacio-tiempo y vectores de Killing	13
1.1.3. Circularidad	15
2. Extensiones de agujeros negros con campos de materia	20
2.1. Campos vectoriales: soluciones cargadas	21
2.1.1. Solución de Reissner–Nordström	21
2.1.2. Solución de Kerr–Newman	22
2.2. Campos escalares	24
2.2.1. Acoplamiento minimal	25
2.2.2. Acoplamiento no minimal	26
2.2.3. Solución BBMB	27
2.2.4. Solución MTZ	28
3. Teorías escalares–tensoriales	30
3.1. Teorías de Horndeski	31
3.1.1. Derivación original de Horndeski	31
3.1.2. Forma del Galileon generalizado	32
3.1.3. Casos particulares relevantes	33
3.2. Invariancia conforme y transformación conforme	34
3.3. Transformación disformal	37
3.4. Beyond Horndeski	38
3.5. Soluciones de agujeros negros en teorías beyond Horndeski	40

3.5.1. Pelo escalar: primario y secundario	40
3.5.2. Simetría de desplazamiento y corriente de Noether	41
3.5.3. Solución de agujero negro con pelo primario en beyond Horndeski	43
4. Teorías de Proca generalizadas	58
4.1. De Maxwell a Proca	58
4.2. Proca generalizada: construcción y acción	59
4.3. Ausencia de inestabilidades y conteo de grados de libertad	60
4.4. Soluciones rotantes con pelo primario en Proca generalizada	60
4.4.1. Subclase de Proca y ansatz de Kerr-Schild	60
4.4.2. No-circularidad y estructura del horizonte	62
4.4.3. Extensión con constante cosmológica	62
5. Termodinámica de agujeros negros	75
5.1. Termodinámica de agujeros negros	75
5.1.1. Leyes de la termodinámica	75
5.1.2. Temperatura de Hawking	76
5.1.3. Método de la acción euclidiana	78
5.1.4. Transiciones de fase en espacios asintóticamente AdS	79
5.1.5. Extensiones de la entropía de Bekenstein–Hawking	80
5.2. Termodinámica de agujeros negros regulares	81
5.2.1. Singularidades y agujeros negros regulares	82
5.2.2. Criterio de Sakharov y núcleo de de Sitter	83
5.2.3. Torre infinita de correcciones de Lovelock y regularización dimensional	84
5.2.4. La acción del artículo en el marco de Horndeski	85
6. Conductividad DC en agujeros negros con pelo escalar	94
6.1. Preliminares	95
6.1.1. Conductividad eléctrica clásica	95
6.1.2. Principio holográfico	97
6.1.3. Correspondencia AdS/CFT	98
6.1.4. Conductividad DC holográfica y disipación de momento	99
7. Magnetotransporte holográfico con electrodinámica ModMax	110
7.1. Preliminares	111
7.1.1. Electrodinámica no lineal y teoría ModMax	111
7.1.2. Agujeros negros diónicos y termodinámica holográfica	113

7.1.3. Magnetotransporte holográfico: efecto Hall y señal de Nernst	115
---	-----

Conclusiones	138
---------------------	------------

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres, quienes han estado presentes durante toda mi vida brindándome apoyo, orientación y cariño. Su esfuerzo constante, sus sacrificios y la confianza que siempre depositaron en mí hicieron posible que hoy pueda alcanzar esta etapa de mi formación. Gran parte de lo que soy, tanto en el ámbito académico como personal, se lo debo a ellos.

A Valeria Ayala, mi pareja y compañera de vida, quien ha estado a mi lado de manera incondicional durante este proceso, brindándome fuerzas y optimismo frente a cada uno de los desafíos que se presentaron a lo largo de este programa doctoral, tanto dentro como fuera de él. Tu presencia lo ha hecho todo más llevadero.

Cuando llega el momento de agradecer, aparecen muchos nombres y recuerdos. Entre ellos, quisiera mencionar especialmente a mi grupo de tenis, "Los Totitos". A través del deporte encontré un espacio para liberar tensiones, despejar frustraciones y recuperar energías cuando las cuentas no cerraban, los cálculos no avanzaban o las ideas parecían no conducir a ningún resultado. Su amistad y compañía hicieron este proceso mucho más llevadero.

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, el Profesor Mokhtar Hassaine, por su guía, paciencia y dedicación durante todos estos años. Más allá de su invaluable aporte académico, sus enseñanzas me ayudaron a comprender mejor los desafíos y responsabilidades de la carrera científica, entregándome herramientas que me acompañarán durante toda mi vida profesional.

Agradezco también a los integrantes de mi comisión de tesis. En particular, al Profesor Christos Charmousis, quien ha estado presente desde mis primeros años de formación en el Magíster. A través de su constante colaboración con mi tutor, sus ideas y contribuciones han influido indirectamente en mi desarrollo académico y en la forma en que entiendo la investigación científica.

Asimismo, quisiera agradecer al Profesor Pedro Fernandes. Aunque no hemos tenido la oportunidad de colaborar directamente, muchos de los resultados presentados en esta tesis encuen-

tran inspiración en trabajos pioneros desarrollados por él. Sus contribuciones a la comunidad científica han sido fundamentales para el desarrollo de varias de las ideas aquí expuestas.

Deseo agradecer especialmente al Profesor Eloy Ayón-Beato por su constante apoyo a lo largo de estos años. Las reuniones grupales de los martes fueron instancias de aprendizaje excepcionales, donde siempre encontró tiempo para discutir conceptos, aclarar dudas y compartir nuevas líneas de investigación. Además, le agradezco profundamente la hospitalidad brindada durante mi estancia de investigación en el CINVESTAV, experiencia que enriqueció enormemente mi formación académica y personal.

Finalmente, quisiera agradecer al Señor X. Algunas de las lecciones más importantes que aprendí durante este camino no provinieron de artículos científicos ni de libros especializados, sino de conversaciones, experiencias compartidas y una forma muy particular de entender la vida. Gracias por enseñarme que el mundo rara vez es blanco o negro, y que entre ambos extremos existe una enorme gama de matices que vale la pena explorar. Gracias por el humor en los momentos difíciles, por la comprensión cuando las cosas parecían no avanzar y por ayudarme a recordar que siempre existe una alternativa antes de abandonar todo para dedicarme a vender completos.

Muchas de sus enseñanzas permanecerán conmigo más allá de esta tesis, porque fueron enseñanzas de vida. Por eso, al cerrar estas páginas, solo puedo despedirme con unas palabras que parecen apropiadas para esta ocasión:

"Debo dejarte. ¿Por qué? No puedo decirlo. ¿A dónde iré? No puedes saberlo. ¿Cómo llegaré? Ah... todavía no lo decido."

Pero sí puedo decir algo más: cada vez que escuche el viento, susurrará tu nombre.

A todas las personas que, de una u otra manera, formaron parte de este recorrido, gracias. Esta tesis también les pertenece.

Introducción

La física teórica del siglo XX estuvo marcada por dos revoluciones conceptuales que transformaron nuestra comprensión del universo: la teoría de la relatividad general, formulada por Einstein en 1915 [1], y la mecánica cuántica. La relatividad general describe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, unificando en una sola estructura geométrica los conceptos de espacio, tiempo y materia. Sus predicciones han sido confirmadas con notable precisión a lo largo de más de un siglo: desde la precesión del perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz por el Sol, hasta la detección directa de ondas gravitacionales por la colaboración LIGO-Virgo en 2015 [2], y la obtención de la primera imagen de un agujero negro por el Event Horizon Telescope en 2019 [3]. Estos últimos hitos, en particular, representan el inicio de una nueva era en la astronomía observacional, donde los agujeros negros han dejado de ser objetos puramente teóricos para convertirse en laboratorios naturales del régimen de gravedad extrema.

Sin embargo, a pesar de sus extraordinarios éxitos, la relatividad general presenta limitaciones fundamentales que señalan los contornos de su propio dominio de validez. Los teoremas de singularidades de Penrose y Hawking [4–6] establecen que, bajo condiciones físicas bastante generales, el colapso gravitacional conduce inevitablemente a la formación de singularidades espaciotemporales: regiones donde la curvatura diverge, las geodésicas se interrumpen y la teoría pierde su capacidad predictiva. La presencia de estas singularidades no es una patología matemática menor, sino una señal inequívoca de que la relatividad general es una teoría efectiva que debe ser reemplazada, o al menos complementada, por un marco más fundamental en el régimen de alta energía. Aunque una teoría completa de gravedad cuántica permanece como uno de los problemas abiertos más profundos de la física teórica, el desarrollo de teorías de gravedad modificada que extiendan la relatividad general de manera consistente constituye un programa de investigación activo y fértil, con implicaciones tanto para la física de altas energías como para la cosmología y la astrofísica.

En este contexto, los agujeros negros ocupan un lugar central. Son los objetos más compactos del universo conocido, concentran en su interior las condiciones más extremas de curvatura

y densidad energética, y constituyen el escenario natural donde las modificaciones de la relatividad general dejan sus huellas más visibles. Desde el punto de vista teórico, uno de los fenómenos más ricos y mejor estudiados en este ámbito es la posibilidad de que los agujeros negros porten *pelo*, es decir, parámetros adicionales más allá de la masa, la carga eléctrica y el momento angular que caracterizan a las soluciones clásicas de la relatividad general. El llamado *teorema de no-pelo* establece que, bajo ciertas condiciones, los agujeros negros estacionarios en la relatividad general son completamente caracterizados por estas tres cantidades. Sin embargo, en teorías de gravedad modificada con campos adicionales, este teorema puede violarse, dando lugar a soluciones con estructura interna más rica y con potenciales consecuencias observacionales.

El marco teórico más general que permite describir la dinámica de un campo escalar acoplado a la gravedad mediante ecuaciones de campo de segundo orden en cuatro dimensiones es la teoría de Horndeski [7], redescubierta modernamente en el lenguaje de los Galileones covariantes [8]. Esta familia de teorías, y su extensión natural conocida como teorías beyond-Horndeski [9, 10] y teorías DHOST [11, 12], ha atraído una atención considerable en la última década por su capacidad de admitir soluciones de agujeros negros con pelo escalar no trivial, evadiendo el teorema de no-pelo mediante mecanismos precisos que involucran la simetría de desplazamiento del campo escalar y la estructura de las corrientes de Noether asociadas. Dentro de esta clase, la distinción entre pelo primario —un parámetro genuinamente independiente de la masa— y pelo secundario —un parámetro determinado por la masa— resulta fundamental para caracterizar la riqueza física de las soluciones.

El primer resultado original de esta tesis, presentado en el Capítulo 3, corresponde a la construcción de un marco sistemático para obtener soluciones exactas de agujeros negros con pelo escalar primario en teorías beyond-Horndeski [13, 14]. Empleando la estructura algebraica particular de estas teorías y un *ansatz* para el campo escalar con dependencia temporal lineal $\phi(t, r) = qt + \psi(r)$, se obtienen soluciones exactas en las que el parámetro de pelo q aparece explícitamente tanto en la métrica como en el campo escalar, distinguiéndolo de configuraciones de pelo secundario. Este marco proporciona además una metodología general que puede aplicarse a diversas subclases de la teoría, abriendo la posibilidad de escalarizar agujeros negros en dimensiones arbitrarias.

Una extensión natural del programa anterior consiste en considerar campos vectoriales masivos en lugar de escalares. Las teorías de Proca generalizada [15, 16] constituyen el análogo vectorial de las teorías de Horndeski: son las teorías más generales de un campo vectorial masivo en cuatro dimensiones con ecuaciones de campo de segundo orden y sin modos fantasma.

El segundo resultado original, presentado en el Capítulo 4, es la construcción de soluciones de agujeros negros rotantes con pelo vectorial primario en cinco dimensiones, empleando el método de Kerr-Schild y explotando la estructura de no-circularidad inherente a estas soluciones. Estas configuraciones representan los primeros ejemplos de agujeros negros rotantes con pelo primario en el marco de teorías de Proca generalizada en $D = 5$, y su análisis revela propiedades geométricas cualitativamente nuevas respecto al caso cuatrodimensional, en particular en lo que respecta a la estructura del horizonte y la violación de la condición de circularidad.

La termodinámica de los agujeros negros constituye uno de los puentes más profundos entre la relatividad general, la mecánica cuántica y la termodinámica estadística. La identificación de la temperatura de Hawking [17, 18] y la entropía de Bekenstein-Hawking [19] con cantidades geométricas del horizonte elevó a los agujeros negros al estatus de sistemas termodinámicos genuinos, sujetos a las mismas leyes que gobiernan cualquier sistema físico macroscópico [20]. El tercer resultado original de esta tesis, presentado en el Capítulo 5, estudia la termodinámica de una clase de agujeros negros regulares cuatrodimensionales obtenidos a partir de una torre infinita de correcciones de curvatura de tipo Lovelock regularizadas dimensionalmente [21]. Mediante el formalismo de la acción Euclidiana [22], se calculan la masa, la entropía y la temperatura de estas soluciones, verificando el primer principio y analizando la estructura de fases. Un resultado notable es la existencia de una *degeneración termodinámica* entre la rama regular escalarizada y la solución de relatividad general con campo escalar trivial.

Los últimos dos resultados originales de esta tesis se sitúan en la intersección entre la gravedad modificada y la materia condensada holográfica. La correspondencia AdS/CFT [23–25] establece una dualidad entre teorías gravitacionales en espacios anti-de Sitter y teorías de campos fuertemente acopladas en su frontera, permitiendo calcular propiedades de transporte de sistemas cuánticos complejos a partir de datos geométricos en el horizonte de un agujero negro.

El cuarto resultado, presentado en el Capítulo 6, estudia el impacto del pelo escalar primario sobre la conductividad DC en teorías beyond-Horndeski [26]. A pesar de que el parámetro de pelo aparece explícitamente en la métrica y en el campo escalar, se demuestra que la conductividad DC no depende directamente de dicho parámetro, siendo su influencia únicamente indirecta a través de la modificación de la ubicación del horizonte.

El quinto resultado, presentado en el Capítulo 7, extiende el marco holográfico al caso del magnetotransporte en presencia de electrodinámica no lineal de ModMax [27]. La teoría

ModMax [28, 29] es la única extensión no lineal de Maxwell en cuatro dimensiones que preserva simultáneamente la invariancia conforme y la dualidad electromagnética. Se calculan analíticamente el ángulo de Hall y la señal de Nernst, mostrando que el parámetro de deformación γ permite acceder a regímenes de transporte cualitativamente nuevos, incluyendo comportamientos anómalos similares a los reportados en superconductores de cuprato de alta temperatura crítica.

La tesis se organiza de la siguiente manera. El Capítulo 1 introduce el marco geométrico de la relatividad general y sus soluciones clásicas. El Capítulo 2 estudia las extensiones con campos de materia. El Capítulo 3 desarrolla las teorías de Horndeski y beyond-Horndeski. El Capítulo 4 estudia las teorías de Proca generalizada. El Capítulo 5 presenta la termodinámica de agujeros negros regulares. Los Capítulos 6 y 7 presentan los resultados holográficos. Finalmente se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Relatividad General y sus soluciones Clásicas

La teoría de la **Relatividad General (RG)**, propuesta por Albert Einstein en 1915 [1], constituye una de las teorías más exitosas de la física moderna, debido a sus numerosas predicciones en astrofísica, cosmología e incluso en el sistema solar. Hasta la fecha, ha sido confirmada experimentalmente con notable precisión. Entre los hitos más recientes destacan la primera detección directa de ondas gravitacionales en 2015 [2], así como la observación de la sombra de un agujero negro, que condujo a la primera imagen de uno de estos objetos en 2019 [3, 30–34].

Desde el punto de vista teórico, su éxito radica en una ruptura paradigmática: abandonar la noción de que el espacio y el tiempo son entidades independientes y estáticas, para unificarlas en una estructura dinámica conocida como **espacio-tiempo**. En este marco, la gravedad deja de interpretarse como una fuerza a distancia y pasa a entenderse como una manifestación de la curvatura de dicha variedad geométrica.

A partir de esta idea surge una pregunta fundamental: ¿qué determina la curvatura del espacio-tiempo? La Relatividad General responde estableciendo una relación directa entre la geometría del espacio-tiempo y su contenido energético. Matemáticamente, esto se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con diez componentes independientes, no lineales y fuertemente acopladas, conocidas como las **ecuaciones de campo de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.0.1)$$

donde $\kappa = 8\pi G/c^4$ es la constante de acoplamiento gravitacional.¹ Aquí, $G_{\mu\nu}$ es el *tensor de Einstein*, que codifica la estructura geométrica del espacio-tiempo, mientras que $T_{\mu\nu}$ es el

¹A lo largo de esta tesis se utilizan unidades naturales en las que $G = c = 1$, por lo que $\kappa = 8\pi$.

tensor de energía–momento, el cual describe el contenido material y energético.

Debido a la naturaleza no lineal de estas ecuaciones, encontrar soluciones exactas constituye un desafío considerable. Sin embargo, bajo la imposición de ciertas simetrías, es posible obtener soluciones físicamente relevantes. Con el fin de establecer el marco geométrico necesario, a continuación se introducen brevemente las herramientas fundamentales de la geometría diferencial que permiten caracterizar dichas simetrías. Posteriormente, se analizarán algunas de las soluciones en el vacío más emblemáticas de la teoría.

1.1 Preliminares geométricos

La Relatividad General describe la gravedad en términos de la geometría de una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ dotada de una métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$. Esta métrica permite definir la distancia entre eventos mediante el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1.1)$$

y determina completamente la estructura causal del espacio-tiempo. En cada punto de la variedad se define un espacio tangente, cuyos vectores pueden clasificarse según su norma como temporales, espaciales o nulos. Esta clasificación juega un rol fundamental en la descripción de trayectorias físicas y en la propagación de señales.

Para comparar cantidades tensoriales en puntos distintos, se introduce la noción de derivada covariante ∇_μ , asociada a una conexión. En Relatividad General se utiliza la *conexión de Levi-Civita*, la cual es compatible con la métrica ($\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$) y libre de torsión. Sus coeficientes, conocidos como *símbolos de Christoffel*, están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (1.1.2)$$

y describen cómo varían los vectores a lo largo de curvas en el espacio-tiempo mediante el transporte paralelo.

La curvatura del espacio-tiempo se codifica en el *tensor de Riemann*, el cual cuantifica la no conmutatividad de las derivadas covariantes. En efecto, al actuar sobre un vector arbitrario V^λ se tiene

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (1.1.3)$$

donde el tensor de Riemann se expresa explícitamente en términos de los símbolos de Chris-

toffel como

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\sigma}. \quad (1.1.4)$$

A partir de este objeto se obtienen, mediante contracciones sucesivas, el *tensor de Ricci* y el *escalar de curvatura*,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.1.5)$$

los cuales permiten definir el *tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.1.6)$$

Este tensor encapsula la dinámica gravitacional al relacionar la curvatura del espacio-tiempo con su contenido energético a través de las ecuaciones de campo de Einstein (1.0.1). Además, satisface la *identidad de Bianchi contraída*,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.1.7)$$

la cual garantiza la consistencia interna de la teoría y conduce a la conservación local del tensor de energía-momento, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

En conjunto, estos elementos establecen el marco geométrico fundamental para el estudio de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, que serán analizadas en lo que sigue.

1.1.1 Formulación lagrangiana de la Relatividad General

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General pueden obtenerse a partir de un principio variacional. En este enfoque, la dinámica del sistema se describe mediante una acción construida a partir de los campos dinámicos y sus derivadas.

El movimiento de una partícula libre en un espacio-tiempo curvo se obtiene al extremizar la acción

$$S = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda, \quad (1.1.8)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de la trayectoria. Las curvas que extremizan esta acción corresponden a *geodésicas*, las cuales satisfacen

$$V^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0, \quad (1.1.9)$$

donde $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ es el vector tangente a la curva. Esta ecuación expresa que el vector

tangente se transporta paralelamente a lo largo de la trayectoria, generalizando la noción de movimiento inercial a espacios curvos.

En el caso del campo gravitacional, la dinámica está gobernada por la *acción de Einstein–Hilbert*,

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} R, \quad (1.1.10)$$

donde el campo dinámico es la métrica $g_{\mu\nu}$, y $\sqrt{-g}$ denota la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de la métrica, necesaria para que la integral sea invariante bajo cambios de coordenadas.

La presencia de derivadas de segundo orden de la métrica en el escalar de curvatura R implica que la variación de (1.1.10) genera términos de frontera que dependen de derivadas de $\delta g_{\mu\nu}$. Para asegurar un principio variacional bien definido, es necesario añadir el *término de Gibbons–Hawking–York* [35, 36],

$$S_{GHY} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}x \sqrt{|h|} K, \quad (1.1.11)$$

donde h es el determinante de la métrica inducida en la frontera $\partial\mathcal{M}$ y K es la traza de la curvatura extrínseca de dicha frontera. Este término cancela las contribuciones de frontera y garantiza que el principio variacional esté bien definido.

Al variar la acción total $S_{EH} + S_{GHY}$ respecto a la métrica se obtienen las *ecuaciones de Einstein en el vacío*,

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.1.12)$$

Este principio variacional proporciona una formulación consistente de la dinámica gravitacional y constituye el punto de partida para considerar extensiones de la teoría en presencia de campos adicionales.

1.1.2 Simetrías del espacio-tiempo y vectores de Killing

En Relatividad General, las simetrías del espacio-tiempo juegan un papel central, ya que permiten simplificar las ecuaciones de campo y están directamente asociadas a leyes de conservación.

Geométricamente, una simetría corresponde a una transformación que deja invariante la métrica. Estas simetrías están generadas por campos vectoriales llamados *vectores de Killing*, definidos por la condición

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.1.13)$$

donde $\mathcal{L}_\xi$ denota la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial ξ^μ , la cual mide la variación de la métrica bajo el flujo generado por dicho campo. Esta condición es equivalente a la ecuación de Killing,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (1.1.14)$$

Desde un punto de vista físico, la existencia de un vector de Killing implica la conservación de una cantidad a lo largo de geodésicas. En efecto, si V^μ es el vector tangente a una partícula libre, entonces $\xi_\mu V^\mu$ permanece constante a lo largo de su trayectoria.

Un caso de particular interés es aquel en que existe un vector de Killing tipo tiempo $\xi^\mu = \partial_t$. En tal situación, el espacio-tiempo se denomina *estacionario*, lo que implica invariancia bajo traslaciones temporales. En la métrica, esto se manifiesta en que sus componentes no dependen de la coordenada temporal, aunque pueden aparecer términos cruzados $g_{ti} \neq 0$ entre el tiempo y las coordenadas espaciales, asociados a efectos de arrastre de marcos de referencia.

Una subclase más restrictiva corresponde a los espacios-tiempo *estáticos*, en los cuales el vector de Killing tipo tiempo es además hipersuperficie ortogonal, es decir, satisface la condición

$$\xi_{[\mu} \nabla_\nu \xi_{\lambda]} = 0. \quad (1.1.15)$$

Por el teorema de Frobenius, esto es equivalente a exigir que no existan términos cruzados entre el tiempo y las coordenadas espaciales en la métrica, $g_{ti} = 0$. En términos físicos, un espacio-tiempo estático no solo es invariante en el tiempo, sino que además no presenta rotación ni efectos de arrastre: la geometría es la misma tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

Por otro lado, las simetrías espaciales también juegan un rol importante. Un espacio-tiempo es *esféricamente simétrico* si es invariante bajo el grupo de rotaciones $SO(3)$, lo cual constituye una condición altamente restrictiva. En contraste, la *simetría axial* solo requiere invariancia bajo rotaciones alrededor de un eje fijo, siendo por tanto una condición menos restrictiva. Esta diferencia es fundamental: mientras la simetría esférica conduce a soluciones estáticas únicas, la simetría axial permite la existencia de soluciones rotantes, como será el caso de la solución de Kerr.

1.1.3 Circularidad

Un espacio-tiempo estacionario y axisimétrico admite dos vectores de Killing, $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ y $\psi^\mu = (\partial_\varphi)^\mu$, asociados respectivamente a la invariancia bajo traslaciones temporales y bajo rotaciones azimutales. La existencia de estas dos simetrías implica que las componentes de la métrica no dependen de las coordenadas t ni de φ , $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$, pero en principio todos los componentes pueden ser no nulos. En particular, una métrica estacionaria y axisimétrica genérica puede contener términos cruzados de la forma g_{tr} , $g_{t\theta}$, $g_{\varphi r}$ y $g_{\varphi\theta}$, que acoplan el sector (t, φ) con el sector (r, θ) .

La *circularidad* es una condición adicional, más restrictiva, que exige que los vectores de Killing ξ^μ y ψ^μ sean ortogonales a una familia de 2-superficies en cada punto del espacio-tiempo. Formalmente, esta condición se expresa exigiendo que el 2-plano generado por $\{\xi^\mu, \psi^\mu\}$ sea integrable, lo que por el teorema de Frobenius [37, 38] es equivalente a exigir que las 1-formas ξ_μ y ψ_μ satisfagan

$$\xi \wedge d\xi \wedge \psi = 0, \quad (1.1.16)$$

$$\psi \wedge d\psi \wedge \xi = 0, \quad (1.1.17)$$

donde $\wedge$ denota el producto exterior y $d\xi$, $d\psi$ son las diferenciales exteriores de las 1-formas asociadas a los vectores de Killing. En términos de las ecuaciones de campo, estas condiciones se traducen en las denominadas *condiciones de Carter-Papapetrou* [39],

$$\xi^\mu R_{\mu[\nu} \xi_\rho \psi_{\sigma]} = 0, \quad (1.1.18)$$

$$\psi^\mu R_{\mu[\nu} \xi_\rho \psi_{\sigma]} = 0, \quad (1.1.19)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci. A través de las ecuaciones de Einstein, estas condiciones imponen restricciones sobre el tensor de energía-momento: se satisfacen automáticamente en el vacío y en presencia de campos de materia cuyo tensor de energía-momento es compatible con las simetrías del espacio-tiempo, como el campo electromagnético en la teoría de Einstein-Maxwell [39].

Consecuencia métrica: estructura diagonal a trozos

Cuando las condiciones de circularidad (1.1.18) y (1.1.19) se satisfacen, existe un sistema de coordenadas adaptado a las dos simetrías en el que los términos cruzados entre el sector (t, φ) y el sector (r, θ) se anulan idénticamente,

$$g_{tr} = g_{t\theta} = g_{\varphi r} = g_{\varphi\theta} = 0. \quad (1.1.20)$$

En este sistema, denominado sistema de coordenadas de *tipo Boyer-Lindquist*, la métrica adopta una estructura diagonal a trozos,

$$ds^2 = \underbrace{g_{tt} dt^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2}_{\text{sector } (t, \varphi)} + \underbrace{g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2}_{\text{sector } (r, \theta)}, \quad (1.1.21)$$

donde todas las funciones dependen únicamente de (r, θ) . El sector (t, φ) retiene el único componente fuera de diagonal $g_{t\varphi}$, cuya presencia refleja la rotación del espacio-tiempo y el fenómeno de arrastre de marcos de referencia. El sector (r, θ) , en cambio, es completamente diagonal, lo que reduce el número de funciones métricas independientes a cuatro: g_{tt} , $g_{t\varphi}$, $g_{\varphi\varphi}$, g_{rr} y $g_{\theta\theta}$.

La estructura (1.1.21) refleja la jerarquía de condiciones impuestas sobre el espacio-tiempo: la estacionariedad garantiza independencia de t ; la simetría axial garantiza independencia de φ ; y la circularidad, condición adicional que no se sigue automáticamente de las dos anteriores, es la responsable de la separación entre los dos sectores. En ausencia de circularidad, términos como g_{tr} o $g_{\varphi\theta}$ pueden estar presentes, acoplando los dos sectores y aumentando significativamente la complejidad del sistema. La métrica de Kerr es el ejemplo paradigmático de una geometría circular estacionaria y axisimétrica, y puede escribirse precisamente en la forma (1.1.21) en coordenadas de Boyer-Lindquist.

Ruptura de circularidad en teorías modificadas

En teorías de gravedad modificada, las condiciones (1.1.18)–(1.1.19) pueden dejar de satisfacerse cuando el tensor de energía-momento del campo de materia no es compatible con las simetrías del espacio-tiempo. Un teorema debido a Xie et al. [40] establece que los agujeros negros en teorías de campo efectivas deben ser circulares, bajo la hipótesis de que el campo de materia puede expresarse como combinación lineal de los vectores de Killing ξ^μ y ψ^μ . Cuando esta hipótesis no se satisface, la circularidad puede romperse y la métrica no puede llevarse a la forma (1.1.21), requiriendo funciones adicionales para su descripción completa. Este es precisamente el caso de las soluciones de Proca generalizada que se discuten en la Sección 4.4.2, donde el campo vectorial alineado con la dirección nula l^μ no puede escribirse como combinación lineal de ξ^μ y ψ^μ , dando lugar a geometrías no circulares con horizontes que dependen del ángulo polar θ .

Solución de Schwarzschild

A pesar de la complejidad de las ecuaciones de Einstein, Karl Schwarzschild encontró en 1916 la primera solución exacta en el vacío, $G_{\mu\nu} = 0$, para un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Un resultado fundamental en este contexto es el *teorema de Birkhoff*, el cual establece que toda solución esféricamente simétrica del vacío es necesariamente estática. En consecuencia, la simetría esférica no solo simplifica el problema, sino que restringe completamente la dinámica: cualquier dependencia temporal de la métrica queda descartada, y los grados de libertad se reducen a una única función de la coordenada radial.

Al resolver el sistema resultante se obtiene de manera única la *métrica de Schwarzschild*,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.1.22)$$

donde M es una constante de integración interpretada como la masa de la fuente gravitacional.

Esta solución presenta dos características estructurales fundamentales. En primer lugar, un *horizonte de eventos* en $r = 2M$, que actúa como una superficie causal unidireccional: ninguna señal proveniente de la región $r < 2M$ puede alcanzar a un observador externo. En segundo lugar, una *singularidad de curvatura* en $r = 0$, caracterizada por la divergencia de invariantes geométricos como el escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. A diferencia de la aparente singularidad en $r = 2M$, que puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas apropiado, la singularidad en $r = 0$ es genuinamente física e irreducible.

La existencia de esta singularidad motiva la búsqueda de soluciones modificadas o regularizadas², tema que será abordado en capítulos posteriores.. Por otro lado, la solución de Schwarzschild describe un caso idealizado sin rotación. En situaciones más realistas, donde los objetos astrofísicos poseen momento angular, la simetría esférica se relaja a simetría axial, dando lugar a geometrías estacionarias pero no estáticas. El ejemplo paradigmático es la solución de Kerr, que se analiza a continuación.

²Una solución *regular* es aquella en la que todos los invariantes de curvatura, como el escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, permanecen finitos en todo el espacio-tiempo, incluido el origen $r = 0$. En contraste, una solución *modificada* puede aún presentar singularidades, pero con una estructura causal o termodinámica distinta a la de Schwarzschild, típicamente como consecuencia de la incorporación de campos de materia o de correcciones a la Relatividad General.

Solución de Kerr

Al relajar la condición de simetría esférica e incorporar rotación, el espacio-tiempo deja de ser estático y pasa a ser, en general, estacionario y axisimétrico. La solución que describe un agujero negro en rotación fue obtenida por Kerr en 1963 [41] y constituye la generalización natural del caso de Schwarzschild.

En coordenadas de Boyer–Lindquist [42], la métrica de Kerr puede escribirse como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.1.23)$$

donde se han definido

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (1.1.24)$$

y $a = J/M$ corresponde al momento angular por unidad de masa.

A diferencia del caso esféricamente simétrico, la presencia del término cruzado $dt d\phi$ refleja el carácter rotante de la solución y da origen al fenómeno de *arrastré de marcos de referencia*, mediante el cual el espacio-tiempo es arrastrado en la dirección de rotación. Desde el punto de vista de las simetrías, esta geometría admite dos vectores de Killing asociados a invariancia temporal y axial, lo que garantiza que el espacio-tiempo es estacionario y axisimétrico, pero no estático.

La estructura causal viene determinada por las raíces de $\Delta = 0$, las cuales definen los horizontes

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.1.25)$$

Dependiendo de la relación entre M y a , se distinguen tres regímenes:

- $a^2 < M^2$: existen dos horizontes, un horizonte externo r_+ y un horizonte interno r_- .
- $a^2 = M^2$: los horizontes coinciden en $r_+ = r_- = M$, dando lugar al caso extremo, en el cual la temperatura de Hawking se anula.
- $a^2 > M^2$: no existen horizontes y la singularidad queda desnuda, en aparente violación de la conjetura de censura cósmica [43].

A diferencia de la singularidad puntual en $r = 0$ de Schwarzschild, la solución de Kerr pre-

senta una *singularidad de anillo* ubicada en $\Sigma = 0$, es decir, en $r = 0$ y $\theta = \pi/2$. Esta singularidad tiene estructura toroidal y es una consecuencia directa de la geometría axisimétrica de la solución [44].

Por otro lado, la superficie donde el coeficiente g_{tt} se anula,

$$g_{tt} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.1.26)$$

delimita la *ergosfera*, una región exterior al horizonte donde no es posible permanecer en reposo respecto al infinito debido al arrastre del espacio-tiempo. En esta región, todo observador es inevitablemente arrastrado en la dirección de rotación del agujero negro, independientemente de la potencia de sus motores.

Una reformulación especialmente conveniente de la métrica de Kerr se obtiene mediante el *ansatz* de Kerr–Schild [45], en el que la métrica se escribe como una perturbación lineal sobre un fondo plano,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2H \ell_\mu \ell_\nu, \quad (1.1.27)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, H es una función escalar y ℓ^μ es un vector nulo tanto respecto a $\eta_{\mu\nu}$ como a $g_{\mu\nu}$, es decir, $\ell^\mu \ell_\mu = 0$ en ambas métricas. Para la solución de Kerr, la función escalar es

$$H = \frac{Mr}{\Sigma} = \frac{Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.1.28)$$

y el vector nulo está dado explícitamente en coordenadas de Boyer–Lindquist por [46]

$$\ell_\mu dx^\mu = dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr - a \sin^2 \theta d\phi, \quad (1.1.29)$$

el cual es geodésico y sin expansión. La estructura (1.1.27) implica que las ecuaciones de Einstein se linealizan de manera exacta sobre el fondo plano, lo que hace del *ansatz* de Kerr–Schild una herramienta poderosa tanto para generar nuevas soluciones como para estudiar extensiones y modificaciones de las soluciones conocidas, en particular en el contexto que se desarrollará en los capítulos siguientes.

Capítulo 2

Extensiones de agujeros negros con campos de materia

Hasta ahora se han considerado soluciones del vacío, donde la geometría del espacio-tiempo está completamente determinada por la métrica. Sin embargo, en un contexto más general, es natural incorporar campos de materia y analizar cómo estos modifican la estructura de las soluciones de agujeros negros.

El ejemplo más simple de un campo de materia es el campo electromagnético, descrito mediante un potencial vectorial A_μ . Su inclusión conduce al sistema de Einstein–Maxwell, cuya dinámica está gobernada por la acción

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.0.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagnético. Al variar esta acción respecto a la métrica y al potencial vectorial se obtienen las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.0.2)$$

en concordancia con (1.0.1), donde el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ está determinado por el campo electromagnético.

La incorporación de este campo da lugar a nuevas familias de soluciones exactas. En el caso estático y esféricamente simétrico se obtiene la solución de Reissner–Nordström, la cual generaliza la geometría de Schwarzschild al incorporar carga eléctrica. Al considerar simultáneamente rotación y carga se obtiene la solución de Kerr–Newman, que extiende la geometría de Kerr. Estas soluciones ilustran cómo la presencia de campos vectoriales enriquece la estructura de los agujeros negros, introduciendo nuevos parámetros físicos y modificando

propiedades fundamentales como la ubicación de los horizontes y la estructura causal. Ambas serán analizadas en detalle en lo que sigue.

2.1 Campos vectoriales: soluciones cargadas

A partir de las ecuaciones de Einstein–Maxwell (2.0.1), el tensor de energía–momento asociado al campo electromagnético viene dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.1.1)$$

Para obtener soluciones estáticas y esféricamente simétricas, se considera un ansatz métrico como extensión directa del caso de Schwarzschild,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1.2)$$

junto con un potencial electrostático compatible con la simetría,

$$A_{\mu} dx^{\mu} = A_t(r) dt. \quad (2.1.3)$$

Al resolver el sistema de Einstein–Maxwell bajo estas hipótesis, se obtiene la solución de Reissner–Nordström, caracterizada por la función métrica

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (2.1.4)$$

donde Q corresponde a la carga eléctrica del sistema, y el potencial electrostático toma la forma

$$A_t(r) = \frac{Q}{r}. \quad (2.1.5)$$

La presencia del término Q^2/r^2 introduce una competencia entre la atracción gravitacional y la repulsión electromagnética, modificando cualitativamente la estructura de horizontes respecto al caso de Schwarzschild. Esta estructura será analizada en detalle en la subsección siguiente.

2.1.1 Solución de Reissner–Nordström

La solución de Reissner–Nordström describe un agujero negro estático y esféricamente simétrico con carga eléctrica Q y masa M . A diferencia del caso de Schwarzschild, la presencia

del término Q^2/r^2 en la función métrica modifica de manera significativa la estructura causal del espacio-tiempo. Los horizontes se obtienen como las raíces de $f(r) = 0$,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.1.6)$$

Dependiendo de la relación entre M y Q , se distinguen tres regímenes:

- $M^2 > Q^2$: existen dos horizontes, un horizonte externo r_+ y un horizonte interno r_- , y la singularidad de curvatura en $r = 0$ queda oculta detrás de ambos.
- $M^2 = Q^2$: los horizontes coinciden en $r_+ = r_- = M$, dando lugar al caso extremo, en el cual la temperatura de Hawking se anula.
- $M^2 < Q^2$: no existen horizontes y la singularidad en $r = 0$ queda desnuda.

El caso extremo resulta particularmente relevante, ya que corresponde a una configuración límite con propiedades geométricas especiales. Este régimen juega un papel central en diversos contextos, incluyendo estudios de estabilidad, supersimetría y termodinámica de agujeros negros. Nótese además que la métrica de Reissner–Nordström extrema, con $f(r) = (1 - M/r)^2$, coincide formalmente con la geometría que aparecerá en la solución BBMB en el capítulo siguiente.

Al igual que en Schwarzschild, el espacio-tiempo presenta una singularidad de curvatura en $r = 0$, caracterizada por la divergencia del escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Sin embargo, la inclusión de carga introduce una nueva estructura en la región interior mediante la presencia del horizonte interno r_- , que separa la región entre horizontes de la región singular.

La persistencia de la singularidad en $r = 0$, presente tanto en Schwarzschild como en Reissner–Nordström, motiva la búsqueda de configuraciones más generales en las que dicha divergencia pueda ser evitada o suavizada. Esta línea de investigación conduce de manera natural al estudio de soluciones con campos escalares, que serán abordados en las secciones siguientes.

2.1.2 Solución de Kerr–Newman

La solución de Kerr–Newman describe un agujero negro en rotación con carga eléctrica, y constituye la generalización más general de las soluciones previamente discutidas dentro del sistema de Einstein–Maxwell. Puede interpretarse como la extensión cargada de la geometría de Kerr, incorporando de manera simultánea masa M , momento angular $J = Ma$ y carga eléctrica Q .

Desde el punto de vista de las simetrías, el espacio-tiempo de Kerr–Newman es estacionario y axisimétrico, admitiendo dos vectores de Killing asociados a invariancia temporal y rotacional. La presencia simultánea de rotación y carga introduce una estructura geométrica rica, caracterizada por términos cruzados en la métrica y el fenómeno de arrastre de marcos de referencia.

En coordenadas de Boyer–Lindquist, la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a(2Mr - Q^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\ + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(2Mr - Q^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.1.7)$$

donde se han definido

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (2.1.8)$$

en directa generalización de las funciones introducidas para la solución de Kerr. El campo electromagnético asociado está dado por

$$A_\mu dx^\mu = - \frac{Qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi), \quad (2.1.9)$$

lo que refleja la presencia simultánea de componentes eléctricas y magnéticas inducidas por la rotación.

La estructura de horizontes está determinada por las raíces de $\Delta = 0$,

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (2.1.10)$$

Dependiendo de los valores de los parámetros, se distinguen tres regímenes:

- $M^2 > a^2 + Q^2$: existen dos horizontes, un horizonte externo r_+ y un horizonte interno r_- .
- $M^2 = a^2 + Q^2$: los horizontes coinciden, dando lugar al caso extremo con temperatura de Hawking nula.
- $M^2 < a^2 + Q^2$: no existen horizontes y la singularidad queda desnuda.

Al igual que en Kerr, la solución presenta una singularidad de anillo en $\Sigma = 0$, es decir, en $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, cuya estructura no se modifica por la presencia de la carga eléctrica.

En conjunto, la geometría de Kerr–Newman representa el caso más general de agujero negro estacionario en Relatividad General con campos electromagnéticos, y sirve como punto de partida para el estudio de extensiones más generales en presencia de otros campos de materia.

La solución de Kerr–Newman admite además una formulación en términos de la forma de Kerr–Schild (1.1.27), con función escalar

$$H = \frac{Mr - Q^2/2}{\Sigma}, \quad (2.1.11)$$

y vector nulo dado por [46]

$$k_\mu dx^\mu = dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr - a \sin^2 \theta d\phi, \quad (2.1.12)$$

que coincide con el de Kerr. Esta representación pone de manifiesto que Schwarzschild, Kerr y Kerr–Newman pertenecen a una misma clase geométrica, caracterizada por una deformación de la métrica plana mediante un campo nulo, y que la incorporación de carga eléctrica se refleja únicamente en una modificación simple de la función escalar H . Esta construcción admite además una extensión natural al caso diónico, en el cual el agujero negro posee simultáneamente carga eléctrica y magnética [47].

2.2 Campos escalares

La incorporación de campos de materia en la Relatividad General no se limita al caso de campos vectoriales. Una extensión natural consiste en considerar campos escalares, los cuales juegan un papel fundamental en diversos contextos físicos, desde teorías efectivas de gravedad hasta modelos de energía oscura y teorías de gravedad modificada. En lo que sigue se analizarán dos formas de acoplar un campo escalar a la geometría: el acoplamiento minimal, en el que el campo escalar no interactúa directamente con la curvatura, y el acoplamiento no minimal, en el que sí lo hace. Este último constituye el punto de partida para las teorías escalares–tensoriales más generales, como las teorías de Horndeski, que serán introducidas en el capítulo siguiente.

2.2.1 Acoplamiento minimal

Desde el punto de vista variacional, el sistema gravitacional acoplado a un campo escalar ϕ puede describirse mediante una acción de la forma

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.2.1)$$

donde $V(\phi)$ corresponde a un potencial escalar. En esta formulación, el campo escalar está *mínimamente acoplado* a la geometría, en el sentido de que su dinámica está determinada únicamente por sus derivadas y un posible potencial, sin términos de acoplamiento directo con cantidades geométricas como el escalar de curvatura R .¹

Las ecuaciones de campo asociadas a esta acción vienen dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \square\phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.2.2)$$

donde el tensor de energía-momento del campo escalar está dado por

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (2.2.3)$$

A pesar de su aparente simplicidad, la presencia de un campo escalar mínimamente acoplado está sujeta a restricciones importantes en el contexto de agujeros negros. El llamado *teorema de no-pelo* establece que las soluciones estacionarias de agujeros negros en Relatividad General están completamente caracterizadas por un número reducido de parámetros conservados: la masa M , la carga eléctrica Q y el momento angular J . En particular, no pueden existir estructuras escalares no triviales fuera del horizonte cuando se satisfacen las siguientes condiciones: que el campo sea estacionario y regular en el exterior del horizonte, que satisfaga la condición de energía dominante, y que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano [48, 49].

Bajo estas condiciones, puede demostrarse que cualquier campo escalar regular en el exterior del horizonte² solución de $\square\phi = dV/d\phi$ debe ser trivial en el exterior del horizonte [48–50].

¹En particular, esto excluye términos adicionales del tipo $R\phi^2$, cuya inclusión da lugar al acoplamiento no minimal discutido en la siguiente subsección.

²Por *regular en el exterior del horizonte* se entiende que ϕ es una función bien definida, continua y diferenciable en toda la región $r > r_+$, sin divergencias en ningún punto ni en ninguna dirección. Cabe destacar que esta condición no se exige en el horizonte mismo $r = r_+$ ni en el interior del agujero negro. La solución BBMB, discutida más adelante, constituye un ejemplo ilustrativo: la métrica es regular en $r = M$, pero el campo escalar diverge precisamente en esa superficie.

Para evadir este resultado es necesario relajar al menos una de estas condiciones. Las estrategias más frecuentes consisten en introducir un potencial escalar con propiedades especiales, considerar espacios-tiempos asintóticamente no planos como el caso Anti-de Sitter, o bien modificar el acoplamiento entre el campo escalar y la geometría. Esta última posibilidad conduce de manera natural al caso de acoplamiento no minimal.

2.2.2 Acoplamiento no minimal

Una extensión natural de la acción anterior consiste en incluir un acoplamiento directo entre el campo escalar y el escalar de curvatura. Esto da lugar a la acción de acoplamiento no minimal,

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - V(\phi) \right], \quad (2.2.4)$$

donde ξ es una constante de acoplamiento. A diferencia del caso minimal, la presencia del término $\xi R \phi^2$ introduce una interacción directa entre la curvatura y el campo escalar, modificando tanto las ecuaciones de movimiento para la métrica como la ecuación de Klein–Gordon efectiva para el campo. Las ecuaciones de campo asociadas son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(\xi)}, \quad \square \phi - \xi R \phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.2.5)$$

donde el tensor de energía–momento efectivo recibe contribuciones tanto del término cinético como del acoplamiento no minimal,

$$T_{\mu\nu}^{(\xi)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \phi^2. \quad (2.2.6)$$

Nótese que en el límite $\xi \rightarrow 0$ se recuperan las ecuaciones del caso minimal.

Un valor particularmente relevante es $\xi = 1/6$ en cuatro dimensiones, conocido como *acoplamiento conforme*. En este caso, la acción adquiere invariancia bajo transformaciones conformes de la métrica (concepto que se introducirá con precisión más adelante, en la Sección 3.2), lo que impone restricciones adicionales sobre la forma del potencial $V(\phi)$ y permite construir soluciones exactas con propiedades geométricas especiales.

Es importante destacar que, a pesar de la presencia del término de acoplamiento $\xi R \phi^2$, las ecuaciones de movimiento derivadas de esta acción son de segundo orden tanto en la métrica como en el campo escalar. Esta propiedad no es trivial y tiene consecuencias físicas profundas. En general, cuando una acción depende de derivadas de orden superior de los campos, las ecuaciones de movimiento resultantes son también de orden superior, lo que introduce gra-

dos de libertad adicionales en el sistema. Estos grados de libertad extra aparecen linealmente en el Hamiltoniano, haciendo que la energía no esté acotada inferiormente: el sistema puede decaer hacia estados de energía arbitrariamente negativa, lo que constituye una inestabilidad conocida como *inestabilidad de Ostrogradsky* [51]. La exigencia de ecuaciones de segundo orden es, por tanto, una condición necesaria para garantizar la estabilidad de la teoría y la ausencia de estos grados de libertad fantasma (*ghosts*). Esta propiedad constituye un criterio central en la construcción de teorías escalares–tensoriales más generales, como las teorías de Horndeski que se discutirán en la Sección 3.1, donde se verá que la condición de segundo orden define precisamente la clase más amplia de teorías escalares–tensoriales físicamente viables.

2.2.3 Solución BBMB

Dentro del marco del acoplamiento no minimal con $\xi = 1/6$ y potencial nulo $V(\phi) = 0$, existe una solución exacta particularmente relevante, conocida como la solución de Bocharova–Bronnikov–Melnikov–Bekenstein (BBMB) [52, 53]. Esta solución describe un agujero negro estático y esféricamente simétrico con campo escalar no trivial, y constituye uno de los primeros ejemplos explícitos de evasión del teorema de no–pelo mediante acoplamiento no minimal.

La geometría asociada viene dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2.7)$$

la cual coincide formalmente con la métrica de Reissner–Nordström extrema, presentando un único horizonte degenerado en $r = M$. Esta coincidencia no es accidental: al igual que en el caso extremo de Reissner–Nordström, la temperatura de Hawking de la solución BBMB se anula, lo que le confiere propiedades termodinámicas especiales que serán analizadas en el Capítulo 5.

El campo escalar está dado por

$$\phi(r) = \pm \sqrt{\frac{6}{4\pi}} \frac{M}{r-M}, \quad (2.2.8)$$

donde los dos signos corresponden a dos ramas de la solución relacionadas por la simetría de paridad $\phi \rightarrow -\phi$ de la acción. La solución presenta un horizonte en $r = M$, donde la métrica permanece regular. Sin embargo, el campo escalar diverge en dicha superficie, lo que

representa una limitación física importante independiente del teorema de no-pelo: si bien la geometría es regular en el horizonte, un observador que cruzara dicha superficie experimentaría un campo escalar divergente, lo que pone en duda la validez de la solución como descripción física completa de un agujero negro con pelo escalar.

Más allá de esta limitación, la solución BBMB ha sido objeto de un análisis físico extenso en la literatura. Desde el punto de vista de la *óptica y la sombra*, el campo escalar modifica las geodésicas de fotones de manera que el campo gravitacional del agujero negro BBMB resulta más débil que el de Schwarzschild a igual masa, lo que se manifiesta en una sombra de menor tamaño [54]. Desde el punto de vista de la *termodinámica*, la temperatura de Hawking se anula idénticamente, $T = 0$, lo que implica que el agujero negro BBMB no emite radiación y su masa permanece constante en el tiempo. Sin embargo, la entropía no se anula: calculada mediante la ley de área, resulta cuatro veces menor que la entropía de Schwarzschild para la misma masa [54]. Finalmente, desde el punto de vista de la *estabilidad orbital*, la órbita circular estable más interna se ubica más cercana al horizonte que en Schwarzschild, con una eficiencia energética de partículas masivas ligeramente superior [54].

A pesar de esta limitación, la solución BBMB tiene un valor conceptual fundamental: demuestra explícitamente que el acoplamiento no minimal permite evadir el teorema de no-pelo, dando lugar a configuraciones con estructura escalar no trivial. Esto motiva la búsqueda de soluciones más generales en las que tanto la geometría como el campo escalar sean regulares fuera del horizonte.

2.2.4 Solución MTZ

Una extensión natural de la solución BBMB se obtiene al considerar un espacio-tiempo asintóticamente Anti-de Sitter, incorporando una constante cosmológica negativa $\Lambda = -3/\ell^2$ junto con un potencial escalar no trivial $V(\phi)$. En este contexto surge la solución de Martínez-Troncoso-Zanelli (MTZ) [55], que puede interpretarse como la versión asintóticamente AdS de la solución BBMB: ambas se obtienen con acoplamiento conforme $\xi = 1/6$, pero la presencia de la constante cosmológica en MTZ introduce una escala de longitud ℓ que rompe la invariancia conforme global de la acción, preservando únicamente la estructura local del acoplamiento.

La métrica de la solución MTZ es

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{M}{r} \right)^2 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{M}{r} \right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2.9)$$

con campo escalar

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{M}{r+M}. \quad (2.2.10)$$

A diferencia de la solución BBMB, el campo escalar en la solución MTZ permanece finito en el horizonte, lo que representa una mejora significativa desde el punto de vista físico. La presencia de la constante cosmológica negativa juega aquí un papel crucial: el comportamiento asintótico Anti-de Sitter actúa como una caja gravitacional que permite sostener configuraciones con campo escalar no trivial y regular. Esta solución ha sido además ampliamente estudiada en el contexto de la termodinámica de agujeros negros y dualidades holográficas [55], lo que refuerza su relevancia como banco de pruebas para teorías escalares–tensoriales en espacios-tiempos curvos.

Desde el punto de vista conceptual, BBMB y MTZ comparten una característica estructural fundamental: en ambos casos las ecuaciones de movimiento para la métrica y el campo escalar son de segundo orden en derivadas. Esta propiedad no es accidental, sino que refleja el hecho de que ambas soluciones se enmarcan dentro de una clase más amplia de teorías escalares–tensoriales con acoplamiento $\xi = 1/6$ caracterizadas precisamente por esta condición. Dicha clase corresponde a las *teorías de Horndeski*, cuya estructura general se introduce en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Teorías escalares–tensoriales

Los resultados del capítulo anterior muestran que la incorporación de campos escalares en Relatividad General, incluso en el marco del acoplamiento no minimal, conduce a soluciones con propiedades geométricas y físicas ricas. Sin embargo, las soluciones BBMB y MTZ representan casos particulares dentro de un marco teórico mucho más amplio. Una pregunta natural es: ¿cuál es la clase más general de teorías escalares–tensoriales que preserva la condición de ecuaciones de movimiento de segundo orden?

Esta pregunta tiene una motivación física precisa. En general, las teorías con ecuaciones de movimiento de orden superior introducen grados de libertad adicionales cuyo Hamiltoniano no está acotado inferiormente, generando inestabilidades conocidas como inestabilidades de Ostrogradsky. La exigencia de ecuaciones de segundo orden es, por tanto, una condición necesaria para garantizar la estabilidad de la teoría y la ausencia de estos grados de libertad fantasma (*ghosts*), como se discutió en la Sección 2.2.2.

La respuesta a esta pregunta fue dada por Horndeski en 1974 [56], quien construyó la acción escalar–tensorial más general en cuatro dimensiones con ecuaciones de movimiento de segundo orden. Esta clase de teorías, conocidas hoy como *teorías de Horndeski*, engloba como casos particulares a la Relatividad General, las teorías de Brans–Dicke, y los modelos de acoplamiento no minimal discutidos anteriormente, entre otros.

En este capítulo se presenta la estructura general de las teorías de Horndeski, se introduce la invariancia conforme y las transformaciones disformales como herramientas para relacionar distintas clases de teorías, y se discuten las extensiones más allá de Horndeski (*beyond Horndeski*), motivando así el estudio de las soluciones de agujeros negros con pelo escalar primario que se presentan en los capítulos siguientes.

3.1 Teorías de Horndeski

Las teorías de Horndeski constituyen la clase más general de teorías escalares–tensoriales en cuatro dimensiones cuya acción depende de la métrica $g_{\mu\nu}$ y un campo escalar ϕ , y cuyas ecuaciones de movimiento son de segundo orden en derivadas tanto para la métrica como para el campo escalar [56]. Formalmente, esto significa que los tensores de campo

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad E_\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi}, \quad (3.1.1)$$

contienen a lo sumo derivadas de segundo orden de $g_{\mu\nu}$ y ϕ .

3.1.1 Derivación original de Horndeski

La construcción original de Horndeski [56] parte de una acción genérica en cuatro dimensiones con invariancia bajo difeomorfismos, $S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}$. La invariancia bajo difeomorfismos implica la *identidad de Bianchi generalizada* para teorías escalares–tensoriales,

$$\nabla^\nu E_{\mu\nu} = -E_\phi \partial_\mu \phi, \quad (3.1.2)$$

la cual es el análogo escalar–tensorial de la identidad $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ introducida en los preliminares geométricos. Dado que E_ϕ es de segundo orden en derivadas, el miembro izquierdo $\nabla^\nu E_{\mu\nu}$ también debe serlo, y no de tercer orden como cabría esperarse a primera vista. Este es el punto de partida de la construcción de Horndeski: encontrar el tensor simétrico más general $A_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial\partial g_{\mu\nu}, \phi, \partial\phi, \partial\partial\phi)$ tal que $\nabla^\nu A_{\mu\nu}$ sea de segundo orden, y además satisfaga

$$\nabla^\nu A_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi B(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial\partial g_{\mu\nu}, \phi, \partial\phi, \partial\partial\phi) \quad (3.1.3)$$

para algún escalar de Lorentz B . La acción que da lugar a las ecuaciones de campo correspondientes es la acción de Horndeski,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma} \left[K_1 \phi^\mu{}_\alpha R^{\nu\sigma}{}_{\beta\gamma} + \frac{2}{3} K_{1X} \phi^\mu{}_\alpha \phi^\nu{}_\beta \phi^\sigma{}_\gamma + K_3 \phi_\alpha \phi^\mu R^{\nu\sigma}{}_{\beta\gamma} + 2K_{3X} \phi_\alpha \phi^\mu \phi^\nu{}_\beta \phi^\sigma{}_\gamma \right] \right. \\ \left. + \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \left[F R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + 2F_X \phi^\mu{}_\alpha \phi^\nu{}_\beta + 2K_8 \phi_\alpha \phi^\mu \phi^\nu{}_\beta \right] + 6(XK_8 - F_\phi) \square \phi + K_9 \right\}, \quad (3.1.4)$$

donde $\delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma}$ es el delta de Kronecker antisimétrico generalizado, es decir, el determinante de la matriz 3×3 formada por los deltas de Kronecker ordinarios δ_μ^α , y las funciones $K_i(\phi, X)$

con $i = 1, 3, 8, 9$ son funciones arbitrarias del campo escalar ϕ y de su término cinético

$$X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (3.1.5)$$

con las abreviaciones $\phi_\mu \equiv \nabla_\mu\phi$, $\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$, y $f_X \equiv \partial f/\partial X$. La función $F \equiv F(\phi, X)$ no es independiente, sino que queda determinada por la condición

$$F_X = 2(K_3 + 2XK_{3X} - K_{1\phi}). \quad (3.1.6)$$

Si bien la acción (3.1.4) es la formulación original, su estructura resulta poco transparente para aplicaciones prácticas. Una forma equivalente, más compacta y de uso extendido en la literatura moderna, se obtiene a partir del formalismo del Galileon generalizado.

3.1.2 Forma del Galileon generalizado

Una reformulación equivalente de las teorías de Horndeski se obtiene a partir del denominado *Galileon covariante* [57, 58]. El punto de partida es la acción de Galileon en un fondo de Minkowski fijo, que corresponde a la acción escalar más general en cuatro dimensiones invariante bajo la transformación galileana $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$ (con b_μ y c constantes) y con ecuaciones de movimiento de segundo orden [59],

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + c_4X[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi] - \frac{c_5}{3}X[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\nu\partial^\rho\phi\partial_\rho\partial^\mu\phi] \right\}, \quad (3.1.7)$$

donde $c_1, \dots, c_5$ son constantes. Al promover esta acción a un espacio-tiempo curvo mediante las sustituciones $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ y $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, la covariantización ingenua introduce derivadas del tensor de Riemann en las ecuaciones de movimiento, lo que elevaría su orden. Para mantener las ecuaciones de segundo orden es necesario incluir términos adicionales de acoplamiento con la curvatura que cancelen dichas contribuciones de manera única [57]. Cabe destacar que este proceso de covariantización rompe explícitamente la simetría galileana: solo la propiedad de ecuaciones de segundo orden se preserva en el Galileon covariante [58].

El paso siguiente consiste en eliminar toda referencia a la simetría galileana y exigir únicamente ecuaciones de segundo orden, lo que conduce al *Galileon generalizado* [60, 61]. En este caso se construye primero la acción escalar más general en un fondo de Minkowski fijo con ecuaciones de segundo orden, sin imponer ninguna simetría adicional, y se promueve luego a un espacio-tiempo curvo añadiendo los términos de curvatura necesarios de mane-

ra única. Este procedimiento puede realizarse en dimensiones arbitrarias, a diferencia de la formulación original de Horndeski que está restringida a cuatro dimensiones [58]. En cuatro dimensiones, el Galileon generalizado toma la forma [60],

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi, X) R \right. \\ \left. + G_{4X} [(\square \phi)^2 - \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}] \right. \\ \left. + G_5(\phi, X) G^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} - \frac{G_{5X}}{6} [(\square \phi)^3 - 3 \square \phi \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + 2 \phi_{\mu\nu} \phi^{\nu\rho} \phi_{\rho}{}^{\mu}] \right\}, \quad (3.1.8)$$

donde G_2, G_3, G_4, G_5 son funciones arbitrarias de ϕ y X , y se utilizan las abreviaciones $\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ y $G_{iX} \equiv \partial G_i / \partial X$.

Esta acción (3.1.8) es equivalente a la formulación original de Horndeski (3.1.4), y la correspondencia entre las funciones G_i y los coeficientes K_i originales está dada por [61]

$$G_2 = K_9 + 4X \int (K_8 \phi - 2K_3 \phi) dX, \quad (3.1.9)$$

$$G_3 = 6F_\phi - 2XK_8 - 8XK_3\phi + 2 \int (K_8 - 2K_3\phi) dX, \quad (3.1.10)$$

$$G_4 = 2F - 4XK_3, \quad (3.1.11)$$

$$G_5 = -4K_1. \quad (3.1.12)$$

La forma (3.1.8) es la que se utilizará de aquí en adelante, por ser la más transparente para identificar casos especiales y analizar las propiedades de las soluciones.

3.1.3 Casos particulares relevantes

La acción de Horndeski (3.1.8) engloba como casos especiales a diversas teorías de interés. En particular:

- **Relatividad General con constante cosmológica:** $G_2 = -2\Lambda$, $G_4 = \frac{1}{16\pi}$, $G_3 = G_5 = 0$.
- **Acoplamiento minimal con potencial:** $G_2 = X - V(\phi)$, $G_4 = \frac{1}{16\pi}$, $G_3 = G_5 = 0$.
- **Acoplamiento no minimal ($\xi R \phi^2$):** se obtiene mediante una elección adecuada de $G_4(\phi)$ que incluye un término proporcional a ϕ^2 , recuperando el acoplamiento de la Sección 2.2.2.
- **Teorías de Brans–Dicke:** $G_2 = \omega(\phi)X/\phi$, $G_4 = \phi$, $G_3 = G_5 = 0$.
- **Teoría conforme generalizada de Fernandes:** un caso particularmente relevante es

la subclase de Horndeski cuya ecuación de movimiento del campo escalar es conformalmente invariante [62]. Esta teoría incorpora un sector escalar–Gauss–Bonnet y está parametrizada por las funciones

$$\begin{aligned} G_2 &= -2\Lambda - 2\lambda e^{4\phi} + 12\beta e^{2\phi} X + 8\alpha X^2, \\ G_3 &= 8\alpha X, \\ G_4 &= 1 - \beta e^{2\phi} + 4\alpha X, \\ G_5 &= 4\alpha \ln X, \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

donde α , β y λ son constantes. Esta elección genera una ecuación geométrica pura que restringe los espacio-tiempos posibles, facilitando la construcción de soluciones exactas en forma cerrada. El caso $\alpha = 0$ recupera la teoría de campo escalar conformalmente acoplado, cuyas soluciones BBMB y MTZ fueron discutidas en el capítulo anterior.

En todos estos casos, las ecuaciones de movimiento son de segundo orden, lo que garantiza la ausencia de inestabilidades de Ostrogradsky. Las soluciones BBMB y MTZ discutidas en el capítulo anterior pertenecen precisamente a esta clase, lo que explica la consistencia de sus ecuaciones de movimiento y anticipa su análisis en el marco más general de Horndeski.

3.2 Invariancia conforme y transformación conforme

Una herramienta fundamental en el análisis de teorías escalares–tensoriales es la transformación conforme de la métrica. En D dimensiones, esta transformación está definida por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \tag{3.2.1}$$

donde $\Omega(x)$ es una función escalar positiva y arbitraria del punto del espacio-tiempo, conocida como factor conforme. Geométricamente, esta transformación corresponde a un reescalamiento local punto a punto de la métrica: preserva los ángulos entre vectores y la estructura causal del espacio-tiempo, pero modifica las distancias y, en general, la curvatura [63].

Una motivación natural para considerar estas transformaciones surge precisamente en el contexto de las teorías con acoplamiento no minimal discutidas en la Sección 2.2.2. En el denominado *marco de Jordan*, la acción contiene un término de la forma $\xi R\phi^2$ que acopla directamente el campo escalar a la curvatura, complicando la estructura de las ecuaciones de movimiento y dificultando su interpretación física. Sin embargo, mediante la transformación

conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}, \quad \Omega^2(\phi) = 1 - 8\pi\xi\phi^2, \quad (3.2.2)$$

es posible pasar al *marco de Einstein*, en el cual la acción toma la forma de Relatividad General estándar con un campo escalar acoplado minimalmente y un potencial redefinido [64]. En otras palabras, la transformación conforme actúa como un mapa entre marcos físicamente equivalentes que simplifica la estructura de la teoría. Esta propiedad pone de manifiesto que las transformaciones conformes no son simplemente un cambio de variables matemático, sino una herramienta que permite relacionar teorías aparentemente distintas y revelar su equivalencia subyacente.

Es importante distinguir entre dos nociones relacionadas pero distintas. Una *transformación conforme* es un cambio de variables en el espacio de campos: la métrica $g_{\mu\nu}$ es reemplazada por $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, lo que define un nuevo marco de referencia. Por otro lado, una teoría se dice *conformalmente invariante* si su acción no cambia bajo dicha transformación, es decir, si la física descrita es independiente del factor de escala local $\Omega(x)$.

En el contexto de las teorías escalares–tensoriales, la invariancia conforme impone condiciones precisas sobre los parámetros de la acción. En particular, para la acción con acoplamiento no minimal introducida en la Sección 2.2.2,

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - V(\phi) \right], \quad (3.2.3)$$

la invariancia conforme se alcanza para el valor $\xi = 1/6$ en cuatro dimensiones, junto con un potencial de la forma $V(\phi) \propto \phi^4$. El valor $\xi = 1/6$ se obtiene de la condición general $\xi = (D-2)/[4(D-1)]$, que en $D = 4$ da precisamente $\xi = 1/6$ [63]. En este caso, la acción es invariante bajo la transformación simultánea

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \phi \rightarrow \Omega^{-1} \phi, \quad (3.2.4)$$

lo que refleja el hecho de que el campo escalar transforma como una densidad conforme de peso apropiado. La regla de transformación $\phi \rightarrow \Omega^{-1} \phi$ es el caso particular $D = 4$ de la regla general $\tilde{\Phi} = \Omega^{(2-D)/2} \Phi$ [63].

La invariancia conforme de la acción no es una propiedad aislada: se hereda directamente a las ecuaciones de movimiento y al tensor de energía–momento del sistema. En efecto, si la acción es invariante bajo la transformación conforme (3.2.4), entonces las ecuaciones de campo son también conformalmente invariantes. Más aún, existe una consecuencia adicional

de especial relevancia física: la traza del tensor de energía–momento se anula idénticamente,

$$T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2.5)$$

Este resultado no es accidental. La anulación de la traza está íntimamente ligada a la ley de conservación: en un marco conformalmente relacionado, el tensor de energía–momento transformado satisface la ley de conservación si y solo si su traza se anula [63]. Concretamente, la anulación de la traza es una consecuencia de que $T_{\mu\nu}$ es proporcional a las ecuaciones de movimiento del campo escalar [65, 66]: cuando los campos satisfacen sus ecuaciones de movimiento, esta proporcionalidad implica que T se anula de manera consistente. Esta propiedad distingue a las teorías conformalmente invariantes de las teorías con acoplamiento minimal, donde la traza del tensor de energía–momento es en general no nula y está determinada por el potencial escalar.

Las soluciones BBMB y MTZ, discutidas en el Capítulo 2, constituyen ejemplos concretos de este marco. Ambas se obtienen en el sector de acoplamiento conforme $\xi = 1/6$. Sin embargo, mientras que la solución BBMB preserva la invariancia conforme de la acción al tener $V = 0$, la solución MTZ la rompe explícitamente debido a la presencia de la constante cosmológica negativa, que introduce una escala de longitud ℓ incompatible con la invariancia bajo reescalamientos locales de la métrica.

Un resultado importante en el contexto de las teorías de Horndeski es que la clase de Horndeski es *cerrada* bajo transformaciones conformes: si se parte de una acción de Horndeski y se realiza la transformación $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}$, donde el factor conforme depende únicamente del campo escalar, la acción resultante pertenece nuevamente a la clase de Horndeski, con funciones $\tilde{G}_i(\phi, X)$ distintas pero de la misma forma funcional [67]. En otras palabras, una transformación conforme no genera nuevas teorías fuera de la clase de Horndeski: simplemente redefine las funciones arbitrarias G_i dentro de la misma clase.

Esta propiedad tiene una consecuencia directa: para obtener teorías genuinamente nuevas, con estructuras que no pueden reducirse a Horndeski mediante una redefinición de campos, es necesario considerar transformaciones más generales. La generalización natural de la transformación conforme en este contexto es la *transformación disformal*, que se introduce en la sección siguiente.

3.3 Transformación disformal

Una vez construida la acción de Horndeski (3.1.8), es natural preguntarse cómo se comporta bajo redefiniciones de los dos campos de los que depende: la métrica $g_{\mu\nu}$ y el campo escalar ϕ . Dado que $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico covariante de rango 2, resulta natural construir un tensor del mismo tipo a partir del campo escalar y sumárselo a la métrica. Existen infinitas posibilidades para construir dicho tensor; algunos candidatos naturales son

$$\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad \partial_\mu \partial_\rho \phi \partial^\rho \partial_\nu \phi, \quad \dots \quad (3.3.1)$$

Las opciones que involucran derivadas segundas del campo escalar, como $\partial_\mu \partial_\nu \phi$, introducen en general términos de orden superior en las ecuaciones de movimiento, lo que puede comprometer la estabilidad de la teoría. Sin embargo, esto no impide su uso de manera sistemática: existen construcciones basadas en derivadas segundas que permanecen bien comportadas siempre que se impongan condiciones de degeneración adecuadas sobre la estructura cinética del lagrangiano [68, 69]. No obstante, el análisis de dichas condiciones va más allá del alcance de este trabajo.

La opción más simple, que evita por construcción la aparición de derivadas superiores sin necesidad de condiciones adicionales, es $\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$, que solo involucra derivadas primeras del campo escalar. Esto conduce de manera natural a la redefinición

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = B(\phi, X) g_{\mu\nu} + D(\phi, X) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (3.3.2)$$

donde $B(\phi, X)$ y $D(\phi, X)$ son funciones arbitrarias del campo escalar ϕ y de su término cinético $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. Esta transformación, conocida como *transformación disformal* [70], engloba la transformación conforme como caso particular: basta tomar $B = \Omega^2(\phi)$ y $D = 0$ para recuperar $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$.

Para que la transformación (3.3.2) sea invertible, es decir, para que la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ defina una geometría no degenerada, se requiere que

$$B \neq 0, \quad B - 2XD \neq 0. \quad (3.3.3)$$

La primera condición garantiza que la parte conforme sea no trivial, mientras que la segunda asegura que el término disformal no degenera el determinante de la métrica transformada [67, 70].

Esta asimetría se refleja directamente en la estructura de (3.3.2): el término $B g_{\mu\nu}$ rescala la métrica de manera uniforme en todas las direcciones, mientras que el término $D \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ actúa de manera diferente sobre vectores paralelos al gradiente $\partial_\mu \phi$ que sobre vectores perpendiculares a él, introduciendo así una dirección privilegiada en cada punto del espacio-tiempo determinada por el gradiente del campo escalar.

A diferencia de lo que ocurre con las transformaciones conformes, la clase de Horndeski *no es cerrada* bajo transformaciones disformales generales. Si se parte de una acción de Horndeski y se aplica la transformación (3.3.2) con $D \neq 0$ y dependencia en X , la acción resultante contiene en general términos con derivadas de orden superior que no pueden reabsorberse mediante una redefinición de las funciones G_i [67, 68]. La teoría obtenida se sale así de la clase de Horndeski, generando una estructura más rica que, sin embargo, no necesariamente introduce inestabilidades físicas.

Este último punto es crucial: el hecho de que las ecuaciones de movimiento sean de orden superior no implica automáticamente la presencia de inestabilidades. La condición relevante para la estabilidad no es el orden de las ecuaciones, sino la presencia o ausencia de grados de libertad adicionales no degenerados cuya energía no está acotada inferiormente. Las teorías obtenidas al aplicar transformaciones disformales a acciones de Horndeski evaden este problema mediante un mecanismo de degeneración, y constituyen precisamente la clase de teorías conocidas como *beyond Horndeski*, que se introduce en la sección siguiente.

3.4 Beyond Horndeski

Como se estableció en la sección anterior, la clase de Horndeski no es cerrada bajo transformaciones disformales generales. Para ver esto de manera explícita, se parte de la acción de Horndeski (3.1.8) y se aplica la transformación disformal

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + D(\phi, X) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (3.4.1)$$

donde se ha fijado $B = 1$ sin pérdida de generalidad. El resultado de este procedimiento es una nueva acción expresada en términos de la métrica transformada $\tilde{g}_{\mu\nu}$ [68, 71],

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \Big\{ & \tilde{G}_2 - \tilde{G}_3 \tilde{\square} \phi + \tilde{G}_4 \tilde{R} + \tilde{G}_{4\tilde{X}} \left[(\tilde{\square} \phi)^2 - \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu} \right] \\ & + \tilde{G}_5 \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{G}_{5\tilde{X}}}{6} \left[(\tilde{\square} \phi)^3 - 3 \tilde{\square} \phi \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu} + 2 \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\nu\rho} \tilde{\phi}_\rho{}^\mu \right] \\ & + \tilde{\mathcal{L}}_{4b} + \tilde{\mathcal{L}}_{5b} \Big\}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

donde $\tilde{\phi}_\mu = \tilde{\nabla}_\mu \phi$, $\tilde{\phi}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi$, y $\tilde{X} = X/(1 - 2DX)$ es el término cinético en el marco disformal. Las funciones $\tilde{G}_i(\phi, \tilde{X})$ tienen la misma estructura funcional que los términos de Horndeski originales, con coeficientes redefinidos en términos de las G_i y de D . Los dos términos adicionales $\tilde{\mathcal{L}}_{4b}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_{5b}$ son genuinamente nuevos y constituyen la huella de la transformación disformal fuera de la clase de Horndeski. Su forma explícita es [71]

$$\tilde{\mathcal{L}}_{4b} = \tilde{F}_4(\phi, \tilde{X}) \left\{ 2\tilde{X} \left[(\tilde{\square} \phi)^2 - (\tilde{\phi}_{\mu\nu})^2 \right] + 2 \left[\tilde{\square} \phi \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_\nu - \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_{\nu\rho} \tilde{\phi}^\rho \right] \right\}, \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{5b} = \tilde{F}_5(\phi, \tilde{X}) \Big\{ & 2\tilde{X} \left[(\tilde{\square} \phi)^3 - 3 \tilde{\square} \phi (\tilde{\phi}_{\mu\nu})^2 + 2 \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\nu\rho} \tilde{\phi}_\rho{}^\mu \right] \\ & + 3 (\tilde{\square} \phi)^2 \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_\nu - 2 \tilde{\square} \phi \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_{\nu\rho} \tilde{\phi}^\rho \\ & - \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_\rho \tilde{\phi}^{\rho\sigma} \tilde{\phi}_\sigma + 2 \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}^{\mu\rho} \tilde{\phi}_{\rho\nu} \tilde{\phi}^{\nu\sigma} \tilde{\phi}_\sigma \Big\}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Un resultado crucial que se desprende directamente de esta estructura es que los términos beyond Horndeski $\tilde{\mathcal{L}}_{4b}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_{5b}$ están controlados por las funciones $\tilde{F}_4$ y $\tilde{F}_5$, las cuales son proporcionales a $D_{\tilde{X}} \equiv \partial D / \partial \tilde{X}$ [67, 71]. En particular:

- Si $D = D(\phi, X)$ con dependencia en X : se generan términos beyond Horndeski con $\tilde{F}_4 \neq 0$ y $\tilde{F}_5 \neq 0$, y la acción resultante sale de la clase de Horndeski.
- Si $D = D(\phi)$ sin dependencia en X : las funciones $\tilde{F}_4$ y $\tilde{F}_5$ se anulan idénticamente, y la acción resultante permanece dentro de la clase de Horndeski con funciones $\tilde{G}_i$ redefinidas [67].
- Si $D = 0$: se recupera la transformación conforme, y como se discutió en la Sección 3.2, la clase de Horndeski es cerrada bajo esta transformación.

Esta jerarquía es conceptualmente importante: la dependencia de D en X es el ingrediente esencial que genera nuevas estructuras fuera de Horndeski. Desde el punto de vista físico, esto significa que la anisotropía introducida por la transformación disformal en la dirección

del gradiente del campo escalar, cuando depende del término cinético, produce términos en la acción que no pueden reabsorberse mediante ninguna redefinición de las funciones $\tilde{G}_i$.

A pesar de que los términos $\tilde{\mathcal{L}}_{4b}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_{5b}$ generan ecuaciones de movimiento de orden superior, las teorías beyond Horndeski no padecen la inestabilidad de Ostrogradsky. Como demostraron Gleyzes, Langlois, Piazza y Vernizzi [72], la teoría beyond Horndeski propaga los dos grados de libertad tensoriales usuales y un único grado de libertad escalar, siempre que se satisfaga la relación

$$3F_5 (G_4 - 2XG_{4X}) = XF_4 G_{5X}. \quad (3.4.5)$$

Las teorías beyond Horndeski que verifican la condición (3.4.5) no padecen inestabilidades de Ostrogradsky, propagando así el mismo contenido de partículas que la teoría de Horndeski original pero con una estructura de acción genuinamente más amplia [72].

3.5 Soluciones de agujeros negros en teorías beyond Horndeski

El desarrollo de las teorías de Horndeski y beyond Horndeski presentado en las secciones anteriores no solo tiene relevancia desde el punto de vista teórico, sino que abre la puerta a la construcción de nuevas familias de soluciones exactas de agujeros negros con campos escalares no triviales. En este contexto, un concepto central es el de *pelo escalar*, que hace referencia a la presencia de un campo escalar no trivial coexistiendo con la geometría del agujero negro.

3.5.1 Pelo escalar: primario y secundario

La noción de pelo en agujeros negros surge en contraposición al teorema de no–pelo discutido en la Sección 2.2.2: si bien dicho teorema restringe la existencia de estructuras escalares no triviales bajo ciertas hipótesis, su evasión da lugar a configuraciones que se denominan genéricamente agujeros negros con pelo. La literatura distingue dos tipos fundamentales [73]:

El *pelo secundario* designa configuraciones en las que la métrica del agujero negro está completamente determinada por los parámetros conservados estándar (masa, carga eléctrica y momento angular), y el campo escalar no introduce ningún parámetro adicional independiente en la geometría. El efecto del campo escalar sobre el espacio-tiempo queda enteramente fijado por dichos parámetros, de modo que no existe libertad adicional en la solución. Un ejemplo paradigmático de esta situación es la solución BBMB [52, 53], obtenida en relatividad escalar conforme, en la que el campo escalar queda determinado completamente por la masa del agujero negro, sin introducir ninguna carga independiente. De manera análoga,

la solución de Martínez–Zanelli [74] en tres dimensiones con campo escalar conformemente acoplado constituye otro ejemplo representativo de pelo secundario: el perfil escalar está fijado por la masa y no representa un grado de libertad independiente.

El *pelo primario*, en cambio, designa configuraciones en las que el campo escalar introduce un parámetro adicional e independiente en la solución, conocido como *carga escalar*. Este parámetro modifica de manera explícita la geometría del espacio-tiempo respecto a la solución de vacío, y los agujeros negros con pelo primario admiten una conexión continua con su contraparte calva: en el límite en que la carga escalar se anula, la solución se reduce continuamente a la geometría de vacío correspondiente [73, 75]. Las soluciones de este tipo que emergen en el marco de las teorías beyond Horndeski serán analizadas en detalle en las secciones siguientes, y constituyen uno de los resultados centrales del presente trabajo.

Esta distinción es fundamental para el análisis que sigue: mientras que la mayoría de las soluciones exactas documentadas en la literatura corresponden a pelo secundario, la construcción de soluciones con pelo primario representa un desafío considerablemente mayor, pues requiere evadir de manera no trivial las hipótesis del teorema de no–pelo sin recurrir a acoplamientos conformes ni a fuentes externas.

3.5.2 Simetría de desplazamiento y corriente de Noether

La construcción de soluciones analíticas con pelo escalar en teorías de Horndeski y beyond Horndeski requiere imponer condiciones adicionales sobre la acción que hagan el sistema de ecuaciones de campo tratable. Una elección especialmente fructífera es exigir que la acción sea invariante bajo la *simetría de desplazamiento* del campo escalar, definida como la invariancia bajo la transformación

$$\phi \rightarrow \phi + c, \quad c = \text{cte.} \quad (3.5.1)$$

Cuando la acción depende del campo escalar únicamente a través de sus derivadas, esta simetría se satisface automáticamente.

Esta elección está motivada por dos razones complementarias. Por un lado, desde el punto de vista del teorema de no–pelo, la shift symmetry elimina por construcción el potencial $V(\phi)$ y cualquier dependencia explícita en ϕ , que son precisamente los ingredientes que Bekenstein utiliza para cerrar el argumento de positividad en su demostración [48]. Al suprimir estos términos, la simetría de desplazamiento constituye la forma más económica de evadir el teorema sin necesidad de introducir acoplamientos no minimales adicionales. Por otro lado, desde el

punto de vista técnico, la shift symmetry garantiza la existencia de una corriente de Noether conservada que convierte la ecuación de movimiento del campo escalar en una condición de divergencia nula, permitiendo integrar directamente la ecuación del escalar para el ansatz de interés y reduciendo así el sistema acoplado de ecuaciones de Einstein a un problema tratable analíticamente.

En el marco de la acción de beyond Horndeski con simetría de desplazamiento, las funciones G_2 , G_4 y F_4 dependen solo del término cinético $X = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, y la acción es además invariante bajo paridad $\phi \rightarrow -\phi$ [75–77].

La consecuencia directa de esta simetría es la existencia de una corriente de Noether conservada,

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu\phi)}, \quad \nabla_\mu \mathcal{J}^\mu = 0. \quad (3.5.2)$$

Esta corriente juega un papel central en la construcción de soluciones analíticas: para un ansatz esféricamente simétrico con campo escalar de la forma

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2,\kappa}^2, \quad \phi(t, r) = qt + \psi(r), \quad (3.5.3)$$

donde q es una constante de integración y $\kappa = 0, \pm 1$ representa la curvatura de la variedad base, la componente radial de la corriente se anula, $\mathcal{J}^r = 0$. Esta condición no es solo una simplificación técnica: determina $\psi'(r)$ algebraicamente en función de $h(r)$, $f(r)$ y q , reduciendo el sistema completo de ecuaciones de campo a dos ecuaciones independientes para las dos funciones métricas [75, 78].

La dependencia lineal en el tiempo del campo escalar, $\phi = qt + \psi(r)$, es compatible con la estacionalidad de la métrica precisamente gracias a la simetría de desplazamiento: como la acción depende solo de las derivadas de ϕ , la dependencia temporal no rompe la simetría estática del espacio-tiempo [76]. La regularidad del campo escalar en el horizonte no está garantizada automáticamente por este ansatz, sino que requiere además que $\psi'(r)$ permanezca finito en $r = r_h$, condición que se satisface precisamente cuando $\mathcal{J}^r = 0$ se impone como condición de contorno en el horizonte [75, 78].

La constante q que aparece en el ansatz (3.5.3) adquiere el carácter de pelo primario cuando aparece también en la función métrica $f(r)$ como parámetro independiente de la masa M . En este caso, la solución describe un agujero negro genuinamente diferente de Schwarzschild, que se reduce continuamente a este cuando $q \rightarrow 0$. Este es precisamente el tipo de soluciones que se construyen en el marco de beyond Horndeski con simetría de desplazamiento, y cuyo

análisis detallado motiva los capítulos siguientes de esta tesis.

3.5.3 Solución de agujero negro con pelo primario en beyond Horndeski

Un resultado reciente de particular relevancia para esta tesis es la construcción de soluciones analíticas exactas de agujeros negros con pelo escalar primario en el marco de beyond Horndeski [75]. Esta constituye una de las primeras familias de soluciones analíticas exactas de este tipo en teorías escalares–tensoriales con un único campo escalar real.

La teoría considerada es la subclase de beyond Horndeski con simetría de desplazamiento y paridad, cuya acción en cuatro dimensiones está parametrizada por las funciones $G_2(X)$, $G_4(X)$ y $F_4(X)$, como se introdujo en la sección anterior. La solución asintóticamente plana se obtiene para la elección específica

$$G_2 = -\frac{8\eta}{3\lambda^2}X^2, \quad G_4 = 1 - \frac{4\eta}{3}X^2, \quad F_4 = \eta, \quad (3.5.4)$$

donde λ tiene dimensión de longitud y η puede tomar cualquier signo [75]. La función métrica resultante es

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \eta q^4 \left(\frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} + \frac{1}{1 + (r/\lambda)^2} \right), \quad (3.5.5)$$

con campo escalar

$$\phi(t, r) = qt + \psi(r), \quad [\psi'(r)]^2 = \frac{q^2}{f^2(r)} \left[1 - \frac{f(r)}{1 + (r/\lambda)^2} \right], \quad (3.5.6)$$

y término cinético

$$X(r) = \frac{q^2/2}{1 + (r/\lambda)^2}. \quad (3.5.7)$$

La solución depende de dos constantes de integración independientes: la masa ADM M y la carga escalar q . Esta independencia es precisamente lo que distingue a esta solución como un agujero negro con pelo primario: cuando $q = 0$, la métrica se reduce continuamente a la solución de Schwarzschild con campo escalar trivial, mientras que para $q \neq 0$ la geometría se modifica de manera explícita respecto a su contraparte calva. El término cinético $X(r)$ es finito en todo el espacio-tiempo, y la regularidad del campo escalar en el horizonte se garantiza imponiendo $\mathcal{J}^r = 0$ como condición de contorno en $r = r_h$, lo que determina $\psi'(r_h)$ de manera unívoca [75, 78].

La estructura de la solución depende de manera cualitativa del signo del parámetro de acoplamiento η . Para $\eta < 0$, la solución describe siempre un agujero negro con un único horizonte de eventos de radio mayor que el radio de Schwarzschild $r_S = 2M$, mientras que para $\eta > 0$ pueden aparecer configuraciones con múltiples horizontes, soluciones extremales o singularidades desnudas dependiendo de la relación entre M y q . En el caso límite $M/\lambda = \pi\eta q^4/4$, la singularidad central desaparece y la solución describe un agujero negro regular o un solitón, dependiendo del valor de M/λ [75].

Este resultado abre una nueva línea de investigación: ¿es posible extender este mecanismo de construcción de pelo primario a una clase más amplia de teorías y geometrías, incluyendo dimensiones arbitrarias, topologías no esféricas y otras teorías de gravedad modificada? Esta pregunta constituye la motivación central del trabajo original que se presenta en el capítulo siguiente, donde se generaliza la construcción de Bakopoulos et al. al caso de dimensión d arbitraria y curvatura de la variedad base $\kappa = 0, \pm 1$.

Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair: An exact solution framework for scalarizing in every dimension

Olaf Baake^{1,*} Adolfo Cisterna^{2,3,†} Mokhtar Hassaine^{1,‡} and Ulises Hernandez-Vera^{1,§}

¹*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*

²*Sede Esmeralda, Universidad de Tarapacá, Avenida Luis Emilio Recabarren 2477, Iquique, Chile*

³*Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, V Holesovickach 2, 180 00 Prague 8, Czech Republic*



(Received 27 December 2023; accepted 15 February 2024; published 11 March 2024)

This work outlines a straightforward mechanism for endowing primary hair into Schwarzschild black holes, resulting in a unique modification within the framework of a special scalar-tensor theory, the so-called beyond-Horndeski gravity. The derived solutions are exact, showcase primary hair with a regular scalar field profile everywhere, and continuously connect with the vacuum geometry. Initially devised to introduce primary hair in spherically symmetric solutions within general relativity in any dimension, our investigation explores the conditions under which spherically symmetric black holes in alternative gravitational theories become amenable to the endowment of primary hair through a similar pattern. As a preliminary exploration, we embark on the process of endowing primary hair to the Reissner-Nordström black hole. Subsequently, we extend our analysis to encompass spherically symmetric solutions within Lovelock and cubic quasitopological gravity theories.

DOI: [10.1103/PhysRevD.109.064024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.064024)

I. INTRODUCTION

Undoubtedly, the present era constitutes a remarkable epoch for the exploration of gravitational phenomena. The affirmation of gravitational waves [1], the first black hole image achieved by the Event Horizon Telescope network [2], and the investigation into the precession orbits of stars revolving around compact massive objects [3] collectively present an unprecedented opportunity to scrutinize gravity on a stage far exceeding the well-established scales of the Solar System [4]. Consequently, a discernible dichotomy emerges: Einstein's theory of general relativity (GR) assumes an unequivocal primacy, having demonstrated confirmation in the realm of strong gravity. Simultaneously, a newfound avenue emerges for the evaluation of alternative gravity theories aspiring to enhance GR and provide solutions to phenomena where the theory proves inadequate. In this context, theories incorporating additional degrees of freedom, particularly scalar fields, emerge as

economical and archetypal modifications of GR. Since their inception, these models, encapsulated within the framework of scalar-tensor theories of gravity, have undergone extensive scrutiny, primarily in the realm of cosmology [5], though their applicability extends far beyond. These models find their most comprehensive formulation in Horndeski theory [6], alongside subsequent higher-order modifications such as beyond-Horndeski theories [7,8] and degenerated higher order scalar tensor theories (DHOST) [9–12]. Establishing a robust foundation for the validity of these alternative models necessitates a meticulous examination of their spectrum of black hole solutions. This endeavor not only furnishes a theoretical framework for assessing the consistency of these models but also anticipates potential experimental implications.

It is commonly argued that, following gravitational collapse, a black hole can be adequately described by a specific set of parameters, namely its mass, electromagnetic charges, and angular momentum. This perspective implies that no additional distinctive features of the original matter, such as baryon or lepton numbers, persist after the black hole formation. In certain scenarios, this proposition is substantiated, leading to the formulation of no-hair theorems [13]. Here, the term “hair” is used metaphorically to encompass all characteristics that would render black holes nonbald, indicating quantities not subject to a Gauss law and, consequently, not conserved at infinity. This definition originates from the numerical construction of Einstein-Yang-Mills black holes, where a discrete

*olaf.baake@gmail.com

†adolfo.cisterna@mff.cuni.cz

‡hassaine@inst-mat.utalca.cl

§uhernandez.vera@gmail.com

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

parameter, that represents the number of nodes of the gauge function [14,15], emerges.

Over the decades, numerous endeavors have been undertaken to construct solutions to introduce various types of hairs to black hole configurations. Notably, there has been a particular focus on scalar hair, which involves configurations where a nontrivial scalar field profile coexists within the spacetime, primarily driven by the assumption of the inherent simplicity of scalar fields [16]. However, the incorporation of scalar fields into black hole configurations proves to be challenging, with many solutions exhibiting curvature singularities or divergence of the scalar field profile within the domain of outer communications. As no-hair theorems constitute theory-dependent mathematical statements, the scientific community has continuously subjected them to scrutiny to assess their validity. Early contributions by Chase [17] and subsequently, by Bekenstein [18] defined conditions under which minimally coupled scalar fields cannot dress a black hole spacetime. Similar no-hair theorems were also formulated by Hawking for the Brans-Dicke theory [19], later generalized in the presence of self-interaction for the scalar field [20]. In a more contemporary context, modern scalar-tensor theories, predominantly represented by Horndeski gravity and its higher-order extensions beyond-Horndeski and DHOST theories, have faced constraints concerning the emergence of hairy black hole solutions [21–24]. However, the potency of these theorems is contingent upon their underlying assumptions, and it is, therefore, plausible to circumvent them by precisely relaxing some of their key axioms. A substantial body of literature has emerged, delving into the construction and investigation of black holes with scalar hair. This journey began with the discovery of black holes in the context of conformally coupled scalar theories [25–40] and has progressed to encompass more recent configurations found in complex minimally coupled models [41] and the Horndeski theory as well as higher-order scalar-tensor theories [42–67].

The diversification of hairy black hole solutions has led to a nuanced understanding of the scalar hair concept, culminating in the categorization of two distinct types: primary and secondary. The latter denotes black hole spacetimes characterized by a nontrivial scalar field profile, which, crucially, does not introduce any additional parameter to the geometry. Consequently, the backreaction of the spacetime exhibits no explicit manifestation of the scalar hair, preventing these solutions from forming a continuous connection with vacuum black hole spacetimes. In contrast, primary hair designates black hole spacetimes featuring a nontrivial scalar field configuration that alters the spacetime backreaction by incorporating an additional parameter. Consequently, black holes with primary hair can form a continuous connection with vacuum solutions, that is, with their bald counterpart geometries. While solutions with secondary hair constitute the majority of existing exact

solutions documented in the literature, those with primary hair have predominantly been constructed through numerical methods [41,68].

In seeking to investigate potential experimental signatures associated with black holes harboring extra degrees of freedom, from an astrophysical perspective, it has been introduced as an intriguing mechanism for the systematic numerical construction of black holes with scalar hair. This process known as “scalarization” represents a pathway by which a vacuum black hole can develop scalar hair through a tachyonic instability, revealing the emergence of black holes with secondary hair at its culmination. The fundamental properties defining a black hole with scalar hair include the presence of black holes exhibiting a consistently regular scalar field configuration. Additionally, their backreaction is contingent upon the existence of a scalar charge (a continuous parameter governing the manifestation of the scalar field profile that, in this case, depends on the mass parameter of the solution). These black hole solutions with secondary hair have undergone thorough investigation in recent years, encompassing not only spherically symmetric configurations [69–74] but also extending to stationary and axially symmetric ones [75–77]. Furthermore, this exploration has extended to hairs beyond the scalar variety, including vectorial and tensorial natures [78–84].

Efforts directed towards the construction of exact black hole solutions featuring primary hair remain limited. This scarcity primarily stems from the intricate nature of the theories within which the search for such hair is conducted, compounded by the challenges posed by the underlying complexities embedded in no-hair theorems. Furthermore, scalarizing processes in the presence of a cosmological constant or within an arbitrary number of dimensions pose considerable difficulties and represent a direction far less explored [85,86]. These constraints significantly limit the applicability of these black holes for exploration, particularly in realms such as black hole thermodynamics or other semiclassical phenomena within the framework of the AdS/CFT conjecture [87–91], just to name a few examples. Consequently, the pursuit of exact black hole solutions with primary hair, or, due to the similarities in the process, exact scalarized black holes¹ becomes an intriguing avenue of investigation.

Recently, analytical black hole solutions featuring primary scalar hair were discovered in [92] within the framework of beyond-Horndeski theories [7] in four dimensions. Beyond-Horndeski theories represent extensions of the

¹The determination of whether these exact black hole solutions with primary hair exhibit a tachyonic instability is not the primary focus of this comparison. Instead, we emphasize the significance of a black hole possessing a regular scalar field configuration everywhere and well-defined geometry, in this particular case connecting with the vacuum via the vanishing of the scalar charge.

well-known Horndeski theories [6], incorporating higher-order derivatives while avoiding Ostrogradski ghosts. These theories have demonstrated considerable promise in the exploration of compact objects, as evidenced in works such as [64–66]. This promise extends to the construction of scalarized black holes or black holes with primary hair. In particular, the authors of [92] demonstrated the existence of an extension of the Schwarzschild black hole within precise beyond-Horndeski models, specifically when $G_2 \sim X^2$, $G_4 \sim X^2$, and $F_4 \sim cte$ [see the action (1) below]. Remarkably, the resulting spacetime remains described by the Schwarzschild metric, augmented by a term proportional to the scalar hair. Furthermore, it was revealed that the inclusion of this additional term enables the elimination of the central singularity through a specific tuning between the mass and the hair.

In this study, we aim to broaden the findings established in [92] by extending the class of beyond-Horndeski theories capable of accommodating similar black hole solutions endowed with primary scalar hair. Despite the original theory being defined in four dimensions, our investigation will encompass the arbitrary dimensional case. Our focus is on demonstrating that the existence of hairy solutions and extending the Schwarzschild black hole paradigm can be guaranteed for a broader selection of theory functions. Specifically, we will establish that a two-parametric subclass of actions, characterized by functions G_2 and G_4 within the framework of (1), facilitates the emergence of such scalarized solutions. The resulting metric solution comprises a superposition of the Schwarzschild-(A)dS function with an additional component proportional to the scalar hair. We will further expand this pattern by demonstrating that, under specific hypotheses, this two-parametric class of beyond-Horndeski theories can be coupled with other actions of pure gravity (beyond-GR and potentially involving additional dynamical fields). This coupling allows for the extension of purely static black hole solutions to static black holes with primary hair.

This paper is organized as follows: In Sec. II, we elaborate our approach to endowing vacuum black holes with primary scalar hair. In essence, we outline the generic construction of scalarized black holes within the domain of spherically symmetric solutions. We delve into the explicit construction of exact scalarized Schwarzschild black holes within a theory characterized by the form (1). Specifically, we demonstrate that solutions featuring primary hair and smoothly connecting to the Schwarzschild-(A)dS solution may exist for a subset of actions (1) parametrized by G_2 and G_4 . The specific scenario where both coupling functions are proportional is examined in detail. Section III introduces a set of conditions under which the framework outlined in Sec. II can be extended to encompass other gravity theories, whether purely geometrical or involving additional matter fields (distinct from the

beyond-Horndeski scalar field, ϕ). We illustrate how black holes in alternative theories can be enhanced to exhibit primary hair of the beyond-Horndeski type, as defined by (1). To illustrate this, we demonstrate how the Einstein-Maxwell theory supports black holes with primary hair, thereby explicitly constructing a scalarized version of the Reissner-Nordström black hole. Subsequently, we extend our exploration to the construction of black holes with primary hair in Lovelock and cubic quasitopological gravities. Finally, Sec. IV is dedicated to concluding and proposing several avenues for further exploration and generalization of the framework presented herein. Given the generic nature of our approach, we allocate an Appendix dedicated to the construction of specific black hole configurations. In particular, we delve into the cases of GR and the Einstein-Gauss-Bonnet theory.

II. SCALARIZING THE SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

The primary objective of this work is to introduce primary hair onto initially bald black hole solutions, beginning within the framework of general relativity (GR) and subsequently, extending to other geometric theories of gravity. Despite the extensive literature on the construction of black holes with hair, these solutions typically manifest secondary hair, exemplified by stealth black holes or standard black holes lacking a continuous limit with the vacuum (bald) geometry. Various techniques have been employed to construct these solutions, ranging from scalar fields that do not share the same symmetries as the geometry to the utilization of disformal transformations. A prevalent characteristic of most solutions is their emergence within theories that feature shift symmetry. This allows the scalar field equation to be formulated as a current conservation law, facilitating the integration of field equations. Another commonly adopted strategy involves stipulating a constant kinetic term for the scalar field. This considerably simplifies the contribution of the scalar sector within a given scalar-tensor theory, reducing the problem to finding stealth black holes by adjusting the Lagrangian functions. Such solutions are attainable when the scalar field profile exhibits a linear time dependence, a characteristic that, due to the shift invariant nature of the models, does not compromise the stationary nature of the solutions. More challenging is the discovery of solutions with a nonconstant kinetic term, representing black holes with novel back-reactions. In the subsequent sections, we will assimilate various elements from the existing literature and combine them in a manner that facilitates the systematic construction of exact black hole solutions with primary hair. This approach is applicable to a sufficiently general class of theories encapsulated within beyond-Horndeski gravity and generically contain a nontrivial kinetic term for the scalar field.

A. Beyond-Horndeski theory and the scalarization scheme

As our initial aim is to scalarize the Schwarzschild black hole and its higher dimensional extension, the Schwarzschild-Tangherlini black hole, we consider the action of quadratic beyond-Horndeski gravity [7] elevated to an arbitrary dimension, d ,

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} [G_2(X) + G_4(X)R + (G_{4,X} + 2XF_4(X))((\Box\phi)^2 - \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}) + 2F_4(X)(\Box\phi\phi^\mu\phi_{\mu\nu}\phi^\nu - \phi_\mu\phi^{\mu\nu}\phi_{\nu\rho}\phi^\rho)]. \quad (1)$$

For simplicity, we have defined $\phi_\mu = \partial_\mu\phi$ and $\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$, where the coupling functions G_2 , G_4 , and F_4 depend solely on the kinetic term $X = -\frac{1}{2}\phi_\mu\phi^\mu$. Here, $G_{4,X}$ stands for the derivative of G_4 with respect to X , i.e., $G_{4,X} = \frac{dG_4(X)}{dX}$, and $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ stands for the Levi-Civita tensor. Notice that GR is naturally included by a proper choice of the theory function G_4 . Action (1) is invariant under a constant shift of the scalar field $\phi \rightarrow \phi + \text{cst}$, a heritage from the Galileon origin of the model [93], and is parity invariant $\phi \rightarrow -\phi$ as it is quadratic in the derivatives of the scalar field.

Focusing on spherical symmetry, we consider a d -dimensional spacetime configuration of the form,

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2,\kappa}^2, \quad \phi(t, r) = qt + \psi(r), \quad (2)$$

where the $(d-2)$ -dimensional base manifold has constant curvature $\kappa = 0, \pm 1$ representing a spherical, hyperbolic, or flat topology, respectively. Here, q is a constant of integration that will also appear in the black hole metric function [92], which will give the constant q the character of primary hair. In addition, it plays a crucial role in the regularity of the scalar field profile. As already mentioned, the action (1) enjoys invariance under a constant translation of the scalar field, and as a consequence, the scalar field equation of motion converts into a conservation law for the scalar Noether current,

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu\phi)}, \quad \nabla_\mu \mathcal{J}^\mu = 0.$$

This property has played a major role in the construction of black hole solutions in Horndeski gravity and its higher order generalizations. Its regularity at the would-be black hole horizon along with a few other assumptions regarding the asymptotic behavior of the would-be solutions and the analyticity of the theory's Lagrangian constitute the

cornerstone of no-hair theorems and therefore, almost by transitivity, has paved the road to understand how these theory dependent statements can be circumvented to obtain interesting geometries featuring nontrivial hair.

Along the lines of [94], it is possible to show that for a configuration of the form (2), the independent field equations to be solved reduce to the metric variation equations $\epsilon_{tt} = 0$ and $\epsilon_{rr} = 0$ and vanish the radial Noether current $\mathcal{J}^r = 0$. As a matter of fact, the nondiagonal Einstein equation $\epsilon_{tr} = 0$, sourced by the linear time dependence of the scalar profile, turns out to be proportional to the scalar current $\mathcal{J}^r$, and thus, no flux for the scalar field takes place. As a consequence, the field equations of our theory take the convenient form,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^r := & r^2 h^2 \tilde{G}_{2,X} + (d-2)(d-3) \left(\kappa h^2 - \frac{q^2 f h}{2X} \right) \tilde{G}_{4X} \\ & + (d-2)q^2 h^2 \left(\frac{f}{h} \right)' r F_4 - (d-2) \left((d-3) f h^2 \right. \\ & \left. + f h h' r - \frac{(d-3)q^2 f h}{2X} \right) \mathcal{Z}_X \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} := & h^3 \left[-\frac{(d-2)fh'}{h} r \mathcal{Z} - r^2 (a_0 + \tilde{G}_2) \right. \\ & - (d-2)(d-3)\kappa(a_1 + \tilde{G}_4) - (d-2)(d-3)f\mathcal{Z} \\ & + \frac{(d-2)(d-3)q^2 f}{2Xh} (\mathcal{Z} + a_1 + \tilde{G}_4) \\ & \left. - \frac{2(d-2)q^2 f}{h} r F_4 X' \right] - (q^2 - 2hX)\mathcal{J}^r \end{aligned} \quad (4)$$

$$\epsilon_{tt} := -\epsilon_{rr} - 2(q^2 - hX)\mathcal{J}^r + 2r^2 X' \mathcal{Z}_X \left(\frac{h}{f} \right) - r^2 \mathcal{Z} \left(\frac{h}{f} \right)'. \quad (5)$$

Please note that for convenience, we have rescaled the equations in the following way:

$$\epsilon_{tt} \rightarrow 2r^2 \epsilon_{tt}, \quad \epsilon_{rr} \rightarrow 2r^2 h^3 \epsilon_{rr}, \quad \mathcal{J}^r \rightarrow -\frac{r^2 h^3}{f\psi'} \mathcal{J}^r.$$

Further, we have voluntarily rewritten the coupling functions G_2 and G_4 as

$$G_2(X) = a_0 + \tilde{G}_2(X), \quad G_4(X) = a_1 + \tilde{G}_4(X), \quad \tilde{G}_{4,X} \neq 0, \quad (6)$$

and hence, the constant a_0 represents an eventual bare cosmological constant, while a_1 corresponds to the standard Einstein-Hilbert term in the action. In addition, it turns out to be advantageous to define the auxiliary function,

$$\mathcal{Z}(X) := 4X^2 F_4 + 2X \tilde{G}_{4,X} - (a_1 + \tilde{G}_4). \quad (7)$$

From these independent equations, one can easily visualize the emergence of hairy (scalarized) extensions of the Schwarzschild black hole. Indeed, considering the homogeneous static case $f = h$ in (2), the compatibility of the last Eq. (5) guides us towards two options, imposing either $\mathcal{Z}$ or X to be constant; here, we will consider the first possibility, $\mathcal{Z} = \text{cst}$. The case of constant X , as it is known, naturally leads to the construction of stealth black hole solutions. Hence, for $\mathcal{Z} = \text{cst} = \mathcal{Z}_0$, the radial current equation $\mathcal{J}^r = 0$ given by (3) reduces to the simple expression,

$$r^2 \tilde{G}_{2,X} + (d-2)(d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \tilde{G}_{4,X} = 0, \quad (8)$$

which later will provide the specific radial dependence (at least implicitly) of the kinetic term $X = X(r)$. Next, choosing the constant function $\mathcal{Z}$ to be $\mathcal{Z} = -a_1$, the remaining independent equation $\epsilon_{rr} = 0$ factorizes in the very suitable form,

$$\begin{aligned} & -a_0 r^2 + a_1(d-2)[rh' + (d-3)h - \kappa(d-3)] \\ & - 2(d-2)q^2 r F_4 X' - r^2 \tilde{G}_2 \\ & - (d-2)(d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \tilde{G}_4 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

From here, the following observations are in order: (i) the terms proportional to a_0 and a_1 will vanish identically for a Schwarzschild (A)dS metric function h , (ii) the term involving X' represents a sort of nonhomogeneity, and (iii) the last two terms of the Eq. (9) are a “kind” of first integral with respect to X of the Eq. (8). In fact, using Eq. (8), Eq. (9) can be written as

$$\begin{aligned} & -a_0 r^2 + a_1(d-2)[rh' + (d-3)h - \kappa(d-3)] \\ & - 2(d-2)q^2 r F_4 X' + \tilde{G}_{4,X}(d-2)(d-3) \\ & \times \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

an expression that can therefore be satisfied for a metric function h whose homogeneous part is given by the Schwarzschild-(A)dS metric function and whose nonhomogeneity is represented by the terms proportional to F_4 and $\tilde{G}_{4,X}$, and where X is defined implicitly by (8). Unifying all these results, we conclude that the subclass of actions (1) parametrized in terms of $\tilde{G}_2$ and $\tilde{G}_4$ with

$$F_4(X) = \frac{-2X \tilde{G}_{4,X}(X) + \tilde{G}_4(X)}{4X^2}, \quad (11)$$

that is,

$$\begin{aligned} S_{\{\tilde{G}_4(X)\}}[g, \phi] = & \int d^d x \sqrt{-g} \left[a_0 + a_1 R + \tilde{G}_2(X) \right. \\ & + \tilde{G}_4(X) R + \frac{\tilde{G}_4(X)}{2X} ((\Box \phi)^2 - \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}) \\ & + \left(\frac{-2X \tilde{G}_{4,X}(X) + \tilde{G}_4(X)}{2X^2} \right) \\ & \left. \times (\Box \phi \phi^\mu \phi_{\mu\nu} \phi^\nu - \phi_\mu \phi^{\mu\nu} \phi_{\nu\rho} \phi^\rho) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

will admit hairy black hole solutions with primary hair for the ansatz (2), with $f = h$, for a scalar field of the form,

$$\phi(t, r) = qt \pm \int \sqrt{\frac{q^2}{f(r)^2} - \frac{2X(r)}{f(r)}} dr. \quad (13)$$

The metric solution $f = h$ will be the superposition of the Schwarzschild-(A)dS metric function and a nonhomogeneous part, mostly controlled by the primary hair parameter, q ,

$$f(r) = \frac{a_0 r^2}{a_1(d-1)(d-2)} + \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{1}{a_1 r^{d-3}} \int \mathcal{H} r^{d-4} dr, \quad (14)$$

where

$$\mathcal{H} = 2q^2 r F_4 X' - \tilde{G}_{4,X}(d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right). \quad (15)$$

Notice that since $X \propto q^2$, the absence of the hair in this expression will be consistent only for $\tilde{G}_2 \propto \tilde{G}_4 \propto \sqrt{X}$ [so that F_4 and the last bracket in (15) vanish], reducing the solution to the black hole stealth already found in [92].²

It is also interesting to note that the standard falloff M/r^{d-3} can be understood via the Kerr-Schild approach developed in [67]. For the sake of clarity and compactness, here we reproduce briefly the arguments as originally presented for the general case [67]. We start with a seed configuration of the form,

$$ds_0^2 = -h_0(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f_0(r)} + r^2 d\Omega_{d-2,\kappa}^2, \quad X = X_0(r), \quad (16)$$

²The other possibility will be to chose $\tilde{G}_4 = \text{cst}$, but this is in contradiction with our construction; see Eq. (6).

a solution of the field Eqs. (3)–(5), where h_0 and f_0 are mass-independent functions. Operating with a Kerr-Schild transformation $ds^2 = ds_0^2 + Ma(r)l \otimes l$, where the null geodesic vector field is $l = dt - dr/(\sqrt{h_0 f_0})$, and requiring invariance of the standard kinetic term under the transformation, proves to be equivalent to mapping the original seed functions according to $h_0(r) \rightarrow h(r) = h_0(r) - Ma(r)$ and $f_0(r) \rightarrow f(r) = f_0(r)(h_0(r) - Ma(r))/h_0(r)$. It is then easy to see that, since X is invariant, these transformations will map the Eqs. (3) and (4) to

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{J}^r}{h^2} &\rightarrow \frac{\mathcal{J}^r}{h^2} + M(d-2)\frac{f_0}{h_0}[ra' + a(d-3)]\mathcal{Z}_X, \\ \frac{\epsilon_{rr}}{h^3} &\rightarrow \frac{\epsilon_{rr}}{h^3} + M(d-2)\frac{f_0}{h_0}[ra' + a(d-3)]\mathcal{Z}_X.\end{aligned}$$

Hence, one can conclude that a Kerr-Schild transformation leaving invariant the kinetic term will be a symmetry of the independent equations, provided the Kerr-Schild function $a(r)$ satisfies the equation $ra'(r) + a(r)(d-3) = 0$, that is $a(r) \sim r^{3-d}$.

B. Schwarzschild-like hairy black holes

A very appealing model that allows for explicit analytic expressions is the one characterized by $\tilde{G}_2 = \lambda\tilde{G}_4$, with λ being a constant. As a matter of fact, in this case, the explicit form of the kinetic term is directly identifiable from Eq. (8), yielding

$$X(r) = \frac{(d-2)(d-3)q^2}{2[\lambda r^2 + \kappa(d-2)(d-3)]}. \quad (17)$$

In addition, the nonhomogenous contribution of the metric $\mathcal{H}$ drastically simplifies, and it is simply given by the beyond-Horndeski function F_4 , which from (11) is shown to be determined in terms of $\tilde{G}_4$ only. In consequence, the subclass of actions (12) parametrized in terms of $\tilde{G}_4$, with $\tilde{G}_2(X) = \lambda\tilde{G}_4(X)$, admits a hairy black hole solution with a scalar field,

$$\phi = qt \pm \int \sqrt{\frac{q^2}{f(r)^2} \left(1 - \frac{(d-2)(d-3)f(r)}{\lambda r^2 + \kappa(d-2)(d-3)} \right)} dr, \quad (18)$$

where the metric reads

$$\begin{aligned}f(r) &= \frac{a_0 r^2}{a_1(d-1)(d-2)} + \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} \\ &+ \frac{2q^2}{a_1 r^{d-3}} \int r^{d-3} X' \left[\frac{-2X\tilde{G}_{4,X} + \tilde{G}_4}{4X^2} \right] dr.\end{aligned} \quad (19)$$

A few comments are in order regarding this hairy black hole solution as defined by Eqs. (17)–(19). Firstly, one can recognize that the metric solution is a superposition

of the Schwarzschild-(A)dS metric together with a piece proportional to the scalar hair, q . In other words, the scalar hair solution continuously connects to the Schwarzschild-Tangherlini-(A)dS solution, providing a scalarized version of the Schwarzschild-(A)dS black hole in any dimension. Secondly, the integral piece of the metric solution (19) is, of course, a defined modulo which is an integration constant, but since this integral is multiplied by a factor r^{3-d} , this “extra” constant can be absorbed into a redefinition of the mass parameter M . Finally, it is desirable that the metric function behaves asymptotically as the Schwarzschild-(A)dS metric, that is

$$f(r) \sim \frac{a_0 r^2}{a_1(d-1)(d-2)} + \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} + O\left(\frac{1}{r^{d-3}}\right), \quad (20)$$

namely, neither the (A)dS term, nor the mass falloff are affected by the inhomogeneous contribution in the metric function. Taking into consideration (17) and its derivative, this requirement translates into the condition,

$$|\tilde{G}_4 - 2X\tilde{G}_{4,X}| \sim \frac{1}{r^\alpha}, \quad \alpha > 2. \quad (21)$$

A constraint that particularly affects the use of a $\tilde{G}_4$ function is linear in X , [92]. It is interesting to remark that to have a finite kinetic term everywhere (17), one can simply choose the sign of the coupling λ to be equal to that of the base manifold curvature, $\text{sgn}(\lambda) = \text{sgn}(\kappa)$. Moreover, for a flat base manifold $\kappa = 0$, the kinetic term will express a divergence at the origin $r = 0$, however, hidden behind the would-be event horizon.

III. SCALARIZING THEORIES BEYOND-GR: EINSTEIN-MAXWELL, LOVELOCK, AND CUBIC QUASITOPOLOGICAL

Having established the scheme behind the scalarization of the Schwarzschild-(A)dS black hole, we extend our result to other gravity theories, in particular the cases of Einstein-Maxwell theory, Lovelock gravity, and the so-called cubic quasitopological gravity. To proceed, we start by complementing the two-parametric action (12) with an action depending on the same metric g and a collection of matter fields, denoted by ψ_m , that is different from the original beyond-Horndeski scalar ϕ , yielding³

³In the eventual case in which the sector defined by $\tilde{\mathcal{L}}_m$ already involves the Einstein-Hilbert piece (respectively, the cosmological constant), we will then consider the action (12) with $a_1 = 0$ (respectively with $a_0 = 0$) in order to avoid a repetition of these terms.

$$\begin{aligned}
 S[g, \phi, \psi_m] = & \int d^d x \sqrt{-g} \left[a_0 + a_1 R + \tilde{G}_2(X) + \tilde{G}_4(X) R \right. \\
 & + \frac{\tilde{G}_4(X)}{2X} ((\square\phi)^2 - \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}) \\
 & + \left(\frac{-2X\tilde{G}_{4,X}(X) + \tilde{G}_4(X)}{2X^2} \right) \\
 & \times (\square\phi\phi^\mu\phi_{\mu\nu}\phi^\nu - \phi_\mu\phi^{\mu\nu}\phi_{\nu\rho}\phi^\rho) \Big] \\
 & + \int d^d x \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{L}}_m(g, \psi_m). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Denoting the field equations coming from the variation of $\tilde{\mathcal{L}}_m$ with the metric as $\tilde{e}_{\mu\nu}$, we consider the following hypotheses:

- (i) The field equations of the Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}_m$ admit a homogeneous static metric solution with purely radial fields of the form,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\tilde{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{\tilde{f}(r)} + r^2 d\Omega_{d-2,\kappa}^2, \\
 \psi_m = & \psi_m(r). \quad (23)
 \end{aligned}$$

- (ii) The field equations $\tilde{e}_{tt}$ and $\tilde{e}_{rr}$ are a proportional modulo of the field equations associated to the equations defining the other fields, $\psi_m(r)$.

It is easy now to prove that the full action (22) will admit a hairy solution of the form,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2,\kappa}^2, \\
 \phi(t, r) = & qt \pm \int \sqrt{\frac{q^2}{f(r)^2} - \frac{2X(r)}{f(r)}} dr, \\
 \psi_m = & \psi_m(r), \quad (24)
 \end{aligned}$$

with X defined implicitly by (8), and where the metric function f will satisfy the following nonhomogeneous differential equation:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{rr}(r, f, f', f'', \dots, \psi_m, \psi'_m, \psi''_m \dots) = & a_0 r^2 \\
 & + a_1 (d-2) [rf' + (d-3)f - \kappa(d-3)] \\
 = & 2(d-2)q^2 r F_4 X' - G_{4,X}(d-2)(d-3) \\
 & \times \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right). \quad (25)
 \end{aligned}$$

In what follows, we will provide three representative examples in addition to a simple counterexample that allows for a deeper understanding of the hypotheses.

A. Black holes with primary hair in Einstein-Maxwell theory

The simplest case for a theory of the form $\tilde{\mathcal{L}}_m$ satisfying the hypotheses (i) and (ii) is the one of Einstein-Maxwell theory. Indeed, as we know, there exists a simple spherically symmetric solution, the Reissner-Nordström black hole, which is actually found from a set of field equations satisfying that $\tilde{e}_{tt} \sim \tilde{e}_{rr}$. Solving (25) and the corresponding Maxwell equations, we obtain

$$\begin{aligned}
 f(r) = & \frac{a_0 r^2}{a_1 (d-1)(d-2)} + \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} \\
 & + \frac{2Q^2}{(d-2)(d-3)r^{2(d-3)}} \\
 & + \frac{1}{a_1 r^{d-3}} \int r^{d-4} \left[2q^2 r F_4 X' - \tilde{G}_{4,X}(d-3) \right. \\
 & \times \left. \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) \right] dr, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$A_0(r) = \frac{Q}{(d-3)r^{d-3}}, \quad (27)$$

where, again, it is evident how the primary hair is added on top of the bald initial solution. It is interesting to remark that, in this case, as well as in the subsequent cases, stealth black holes are simply found by considering $\tilde{G}_2 \propto \tilde{G}_4 \propto \sqrt{X}$. As noticed in (15) for such a choice of the theory functions, the nonhomogeneous source always vanishes. In this particular subsection, this black hole corresponds to a charged stealth solution defined on top of the Reissner-Nordström metric.

B. Black holes with primary hair in Lovelock gravity

Another appealing example in which the hypothesis (i) and (ii) are fulfilled, is the one of Lovelock gravity [95]. The Lovelock theory represents the natural higher dimensional generalization of Einstein's theory; therefore, it is to be expected that condition (ii) will indeed hold. In addition, it is known that in an arbitrary dimension, and for the complete series representing the whole tower of curvature invariants, up to order $[(d-2)/2]$, a spherically symmetric solution always exists, at least implicitly given by the so-called Wheeler polynomial, of which its most representative explicit case is given by the Boulware-Deser black hole [96], the spherically symmetric solution of the Einstein-Gauss-Bonnet system.

In consequence, considering the Lagrangian of Lovelock gravity of order k (in which the zero and first order terms represent the cosmological constant and Einstein-Hilbert contributions),

$$\tilde{\mathcal{L}}_m(g) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} a_k \frac{(2k)!}{2^k} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \cdots \delta_{\alpha_k}^{\mu_k} \delta_{\beta_k}^{\nu_k}] \prod_{r=1}^k R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r}, \quad (28)$$

the metric function describing the hairy generalization of the general Lovelock black hole is implicitly given by a root of the following generalized Wheeler polynomial:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \frac{a_k (d-1)!}{(d-2k-1)!} \left(\frac{\kappa - f(r)}{r^2} \right)^k \\ &= \frac{2M}{r^{d-1}} - \frac{1}{r^{d-1}} \int r^{d-4} \left[2q^2 r F_4 X' \right. \\ & \quad \left. - \tilde{G}_{4,X} (d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) \right] dr. \quad (29) \end{aligned}$$

From the polynomial (29), explicit cases are easily obtainable, up to the solution of the corresponding algebraic equation. Therefore, solutions like the Boulware-Deser black hole with primary hair or hairy generalizations with even higher corrections in the curvature, such as the cases in which a degenerate vacuum arises, can be straightforwardly studied. In addition, charged solutions follow with ease.

C. Black holes with primary hair in cubic quasitopological gravity

Let us now shift our focus to an alternative yet intriguing higher curvature order gravity, namely, cubic quasitopological gravity. These theories, originally constructed in [97], represent a class of higher curvature order gravity theories that, when assuming spherical symmetry, result in second-order field equations. Notably, they deviate from the general case of Lovelock theories, particularly in any odd dimension. Extensively investigated in the literature [98–105], quasitopological gravities provide a compelling framework for our exploration. In this context, we embark on a complementary approach by augmenting the cubic quasitopological Lagrangian with action (22) for the case of $d = 5$. This extension aims to introduce primary hair to the

already identified black holes within this quasitopological model [97],

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_m(g) = a_2 \mathcal{G} + a_3 & \left(-\frac{7}{6} R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} R^{\lambda\sigma}_{\nu\tau} R^{\rho\tau}_{\mu\sigma} - R^{\lambda\rho}_{\mu\nu} R^{\nu\sigma}_{\lambda\rho} R^{\mu}_{\sigma} \right. \\ & - \frac{1}{2} R^{\lambda\rho}_{\mu\nu} R^{\mu}_{\lambda} R^{\nu}_{\rho} + \frac{1}{3} R^{\mu}_{\nu} R^{\nu}_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu} \\ & \left. - \frac{1}{2} R R^{\mu}_{\nu} R^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{12} R^3 \right), \quad (30) \end{aligned}$$

where $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ is the Gauss-Bonnet density. In [97], this cubic theory was shown to have second order traced field equations, and admit black hole solutions that fit our hypotheses. It is then easy to see that for the coupled system, the metric function solution, f , will satisfy the following nonhomogeneous cubic equation:

$$\begin{aligned} & \frac{a_3}{3} \frac{[\kappa - f(r)]^3}{r^2} + a_2 [2f(r)(2\kappa - f(r))] \\ & + a_1 r^2 (f(r) - \kappa) - \frac{a_0 r^4}{12} \\ &= -2M + \int r \left[2q^2 r F_4 X' - \tilde{G}_{4,X} (d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) \right] dr, \quad (31) \end{aligned}$$

and, hence, convert the black hole solution of [97] to a hairy solution of the full theory. A similar construction can also be achieved in any odd dimension $d = 2p - 1$, by considering the general Lagrangian [97],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p = \frac{1}{2^p} & \left(\frac{1}{d-2p+1} \right) \delta^{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_p \nu_p}_{\lambda_1 \rho_1 \cdots \lambda_p \rho_p} \left(C^{\lambda_1 \rho_1}_{\mu_1 \nu_1} \cdots C^{\lambda_p \rho_p}_{\mu_p \nu_p} \right. \\ & \left. - R^{\lambda_1 \rho_1}_{\mu_1 \nu_1} \cdots R^{\lambda_p \rho_p}_{\mu_p \nu_p} \right) - \gamma_p C^{\mu_1 \nu_1}_{\mu_p \nu_p} C^{\mu_1 \nu_1}_{\mu_2 \nu_2} \cdots C^{\mu_{p-1} \nu_{p-1}}_{\mu_p \nu_p}, \quad (32) \end{aligned}$$

where

$$\gamma_p = \frac{(d-4)!}{(d-2p+1)!} \frac{[p(p-2)D(d-3) + p(p+1)(d-3) + (d-2p)(d-2p-1)]}{[(d-3)^{p-1}(d-2)^{p-1} + 2^{p-1} - 2(3-D)^{p-1}]}, \quad (33)$$

and where $C_{\mu\nu\lambda\rho}$ denotes the Weyl tensor. As before, we set a_0 and a_1 to zero in (22). Then, the metric solution $f(r)$ satisfies the following polynomial equation, similar to the pure Lovelock case:

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \bar{a}_k \left(\frac{\kappa - f(r)}{r^2} \right)^k = \frac{2M}{r^{d-1}} - \frac{1}{r^{d-1}} \int r^{d-4} \left[2q^2 r F_4 X' - \tilde{G}_{4,X} (d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) \right] dr. \quad (34)$$

Note that the dimensional factor of the term coming from $\mathcal{L}_p$ has a slightly different form than those of the Lovelock terms. As we have already mentioned, in odd dimensions, these theories do not coincide. Hence, we have absorbed all factors into their corresponding coupling constants and rescaled them to obtain a more convenient form. This form allows for another

simplification when the rescaled coupling constants are such that

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= \frac{\bar{a}_{p-1}^p}{\bar{a}_p^{p-1}}, & \bar{a}_1 &= \frac{\bar{a}_{p-1}^{p-1}}{\bar{a}_p^{p-2}}, \\ \bar{a}_2 &= \frac{\bar{a}_{p-1}^{p-2}}{\bar{a}_p^{p-3}}, \dots, \bar{a}_{p-2} &= \frac{\bar{a}_{p-1}^2}{\bar{a}_p}.\end{aligned}\quad (35)$$

In this case, the polynomial equation of order p reads

$$\begin{aligned}\frac{\{r^2\bar{a}_{p-1} - \bar{a}_p[\kappa - f(r)]\}^p}{r^{2p}\bar{a}_p^{p-1}} &= \frac{2M}{r^{d-1}} - \frac{1}{r^{d-1}} \int r^{d-4} \left[2q^2 r F_4 X' \right. \\ &\quad \left. - \tilde{G}_{4,X}(d-3) \left(\kappa - \frac{q^2}{2X} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\tilde{G}_2}{\tilde{G}_{2,X}} - \frac{\tilde{G}_4}{\tilde{G}_{4,X}} \right) \right] dr.\end{aligned}\quad (36)$$

D. A counterexample with the vacuum conformal gravity solution

To appreciate our working hypotheses, we shall provide a counterexample, the case of conformal gravity [106]. There exists an elementary example of a static solution in the homogeneous form (23) for which the field equations $\tilde{e}_{tt}$ and $\tilde{e}_{rr}$ are not proportional. Consider the action (22) in $d = 4$ with $a_0 = a_1 = 0$ and

$$\tilde{\mathcal{L}}_m(g) = C_{\lambda\mu\nu\kappa} C^{\lambda\mu\nu\kappa},$$

where, as before, $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ is the Weyl tensor. Indeed, one can see that in this case, the hypothesis (ii) is broken since

$$\frac{\tilde{e}_{tt}}{f^2(r)} + \tilde{e}_{rr} = -\frac{8f'''(r)}{3r} - \frac{2}{3}f''''(r).$$

Note that, in the vacuum case, the metric solution [106] is such that the right-hand side vanishes identically, and hence, there is no consequence of $\tilde{e}_{tt}$ not being proportional to $\tilde{e}_{rr}$. However, in general, in our construction, the non-homogeneity acquired from the primary hair will not be such that the right-hand side of the previous equation vanishes.

IV. FURTHER COMMENTS

In this work, we have explored a scalar-tensor theory within the so-called beyond-Horndeski gravity, a theory that accommodates higher-order terms while preserving the propagation of healthy degrees of freedom [7]. We have deliberately confined our investigation to a scalar theory invariant under a constant shift of the scalar field. In this particular scenario, the presence of a conserved Noether

current proves to be an important tool in the search for analytical solutions. Remarkably, the action (1) has demonstrated noteworthy potential in the construction of exact black hole solutions, as evidenced by the recent work of [92]. The solutions presented in this reference have been found for specific coupling functions G_2 , G_4 , and F_4 , and correspond to black holes characterized by primary scalar hair. Notably, these scalarized black holes maintain a continuous connection with the Schwarzschild solution.

In this investigation, we have extended the framework of [92] in two key directions. Firstly, we considered its arbitrary dimensional extension, and secondly, we explored the circumstances under which the beyond-Horndeski model, as considered herein, can be coupled to gravity theories beyond-GR to yield hairy black holes with primary hair. Concerning the former, we have identified the most comprehensive class of actions (1) that facilitates the emergence of black holes with primary scalar hair that are continuously connecting to the Schwarzschild-Tangherlini-(A)dS solution. In relation to the latter point, we have precisely identified the possible alternative gravitational theories (with possibly extra dynamical fields different from the scalar field) that can be coupled with our beyond-Horndeski model to generate scalarized black holes. Subsequently, we have demonstrated how the Reissner-Nordström black hole of Einstein-Maxwell, as well as the static black hole configurations within general Lovelock and cubic quasitopological gravities, can be promoted to configurations featuring primary hair. As in [92], the hair of our solutions is given by the integration constant q . This constant, which accompanies the linear time dependence of the scalar field, ensures the regularity of the scalar field throughout the spacetime. It is essential to note that, although all our solutions exhibit a continuous limit with their bald counterparts, they do not necessarily represent a linear superposition.

In the broader context of scalar-tensor theories, such as Horndeski, beyond-Horndeski, or DHOST theories [9–11], it is known that certain specific sectors exhibit black hole solutions that are distinctly disconnected from the Schwarzschild solution. In light of this observation, it would be appealing to categorize all these scalar-tensor theories according to whether or not they support solutions that are continuously connecting to vacuum solutions of general relativity. To pursue this task, insights coming from the Kerr-Schild framework developed in [67] could be useful. In this reference, shift-invariant DHOST theories invariant under a Kerr-Schild transformation that preserves the invariance of the kinetic term were identified (with a scalar field possibly linear in the time coordinate). Particularly, those theories featuring a standard falloff mass term in their static black hole solutions emerge as potential candidates for accommodating hairy black holes that are continuously connected with the Schwarzschild solution. Proceeding along this path, we recognize that Kerr's

solution can be obtained through a Kerr-Schild transformation employing a null, geodesic, and shear-free congruence. The seed metric, representing the solution with zero mass, corresponds to the flat metric expressed in ellipsoidal coordinates. However, in our scenario, due to the inclusion of the scalar field, particularly the parameter q , the metric solution with zero mass deviates from a flat metric. This departure signifies a substantial alteration from Kerr's metric. Thus, it becomes intriguing to delve into the properties of the null, geodesic, and shear-free congruences of this hairy seed configuration, encompassing the scalar field and metric solutions with $M = 0$. Once these characteristics are established, we can initiate a Kerr-Schild transformation from the seed configuration to generate rotating versions of our solution, thereby discerning the potential astrophysical ramifications of these hairy solutions. Since the seed configuration diverges from Kerr's metric, the resulting metric will not resemble Kerr's, presenting an opportunity for leveraging this metric in current and future gravity experiments.

Finally, the availability of exact black hole spacetimes with primary hair opens avenues for several analyses that can be done analytically. Notably, it becomes pertinent to conduct in-depth investigations into the thermodynamic properties of these spacetimes, compute the corresponding black hole charges, establish methodologies for regularizing a given theory action [107], and substantiate the validity of the first law. Then several applications of these solutions can be performed along the lines of the AdS/CFT conjecture or black hole chemistry [108]. Additionally, a comprehensive analysis of the causal structure, geodesics, and algebraic classification promises a more nuanced understanding of the interplay between vacuum and hairy black holes with primary hair. We anticipate presenting findings on these aspects in the near future.

ACKNOWLEDGMENTS

We express our gratitude to Eloy Ayón-Beato, Christos Charmousis, Luis Guajardo, Nicolas Lecoer, and Julio Oliva for interesting discussions regarding the topics exposed here. The work of A.C. is partially supported by Fondecyt Grant No. 1210500 and Primus Grant No. PRIMUS/23/SCI/005 from Charles University. The work of M.H. is partially funded by Fondecyt Grant No. 1210889. The work of U.H. is partially supported by ANID Grant No. 21231297. This work benefited from State aid under France 2030 (P2I -Graduate School Physics) bearing the Reference No. ANR-11-IDEX-0003. A.C. would like to thank the Paris Aéroport Roissy Charles de Gaulle for providing the necessary environment to finish this work. A.C. and M.H. would like also to thank l'Institut Pascal of University Paris-Saclay, where this work has been initiated.

APPENDIX: CONCRETE EXAMPLES

For the sake of concreteness, we will give some explicit cases. We start by considering (12)

$$\tilde{G}_2(X) = -\frac{\lambda(d-3)(d-2)}{2n-1}X^n, \quad (\text{A1})$$

$$\tilde{G}_4(X) = -\frac{\lambda}{2n-1}X^n, \quad (\text{A2})$$

$$F_4(X) = \frac{1}{4}\lambda X^{n-2}, \quad (\text{A3})$$

where evidently $\tilde{G}_2 \propto \tilde{G}_4$. Recall that the case $n = \frac{1}{2}$ deserves particular attention as already noticed in [92] (see below). Further, for convenience, we have fixed the constants $a_0 = 0$ and $a_1 = 1$. This provides a kinetic term X of the form,

$$X = \frac{q^2}{2(\kappa + r^2)}, \quad (\text{A4})$$

and the solution of the metric function for the case of GR then reads

$$\begin{aligned} f(r) &= \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} - \frac{2\lambda}{r^{d-3}} \int r^{d-2} X^n dr \\ &= \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{\lambda q^2}{2(n-1)} \\ &\quad \times \left[X^{n-1} - \frac{(d-3)}{r^{d-3}} \int r^{d-4} X^{n-1} dr \right] \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned} &= \kappa - \frac{2M}{r^{d-3}} - \frac{2^{1-n}\lambda\kappa^{-n}q^{2n}}{d-1} r^2 {}_2F_1 \\ &\quad \times \left(\frac{d-1}{2}, n; \frac{d+1}{2}; -\frac{r^2}{\kappa} \right), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

where ${}_2F_1$ is the Gaussian hypergeometric function. In particular, with n being an integer, this takes an even more simple form; for example, for $n = 3$ and in four dimensions, we obtain

$$f(r) = \kappa - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda q^6}{32\kappa} \left[\frac{(r^2 - \kappa)}{(r^2 + \kappa)^2} + \frac{1}{r\kappa^{1/2}} \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{\kappa}}\right) \right]. \quad (\text{A7})$$

We can even extend this to include the Gauss-Bonnet term in the action in the same line as we did in the general Lovelock case. This yields a general form of the metric function,

$$f = \kappa + \frac{r^2}{2\alpha(d-4)(d-3)} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\alpha M(d-4)(d-3)}{r^{d-1}} + \frac{8\lambda\alpha(d-4)(d-3)}{r^{d-1}} \int r^{d-2} X^n dr} \right), \quad (\text{A8})$$

where α is the coupling constant of the Gauss-Bonnet term. When carefully taking the limit $\alpha \rightarrow 0$ (in the case of the lower sign in front of the square root), this reduces to the Schwarzschild-like case from before. For example, let us give the specific form of the metric function in five dimensions for $n = 3$,

$$f = \kappa + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\alpha}{r^4} \left[M - \lambda \frac{q^6(\kappa + 2r^2)}{32(\kappa + r^2)^2} \right]} \right). \quad (\text{A9})$$

To conclude, as already mentioned for $\tilde{G}_4(X) \propto \sqrt{X}$, the coupling function F_4 , as defined by (11), vanishes identically, and consequently, the nonhomogeneity

disappears. Hence, in the case of Einstein-Gauss-Bonnet gravity and for

$$\tilde{G}_2(X) = -\lambda(d-3)(d-2)\sqrt{X}, \quad \tilde{G}_4(X) = -\lambda\sqrt{X}, \quad (\text{A10})$$

we end up with a stealth defined on the Boulware-Deser black hole solution similar to the one found in [59]

$$f(r) = \kappa + \frac{r^2}{2\alpha(d-3)(d-4)} \times \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\alpha M(d-3)(d-4)}{r^{d-1}}} \right). \quad (\text{A11})$$

-
- [1] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
 - [2] K. Akiyama *et al.* (Event Horizon Telescope Collaboration), *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
 - [3] R. Abuter *et al.* (GRAVITY Collaboration), *Astron. Astrophys.* **636**, L5 (2020).
 - [4] C. M. Will, *Living Rev. Relativity* **17**, 4 (2014).
 - [5] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, *Phys. Rep.* **513**, 1 (2012).
 - [6] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
 - [7] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 211101 (2015).
 - [8] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2015) 018.
 - [9] D. Langlois and K. Noui, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2016) 034.
 - [10] D. Langlois and K. Noui, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07** (2016) 016.
 - [11] M. Crisostomi, K. Koyama, and G. Tasinato, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2016) 044.
 - [12] J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato, *J. High Energy Phys.* **12** (2016) 100.
 - [13] R. Ruffini and J. A. Wheeler, *Phys. Today* **24**, No. 1, 30 (1971).
 - [14] M. S. Volkov and D. V. Gal'tsov, *JETP Lett.* **50**, 346 (1989).
 - [15] P. Bizon, *Acta Phys. Pol. B* **25**, 877 (1994).
 - [16] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1542014 (2015).
 - [17] J. E. Chase, *Commun. Math. Phys.* **19**, 276 (1970).
 - [18] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 452 (1972).
 - [19] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25**, 167 (1972).
 - [20] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 081103 (2012).
 - [21] L. Hui and A. Nicolis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 241104 (2013).
 - [22] A. Maselli, H. O. Silva, M. Minamitsuji, and E. Berti, *Phys. Rev. D* **92**, 104049 (2015).
 - [23] E. Babichev, C. Charmousis, and A. Lehébel, *Classical Quantum Gravity* **33**, 154002 (2016).
 - [24] P. Creminelli, N. Loayza, F. Serra, E. Trincherini, and L. G. Trombetta, *J. High Energy Phys.* **08** (2020) 045.
 - [25] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **82**, 535 (1974).
 - [26] N. Bocharova, K. Bronnikov, and V. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ. Ser. III Fiz. Astron.* **6**, 706 (1970).
 - [27] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **91**, 75 (1975).
 - [28] B. C. Xanthopoulos and T. E. Dialynas, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **33**, 1463 (1992).
 - [29] C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **67**, 024008 (2003).
 - [30] C. Martinez, J. P. Staforelli, and R. Troncoso, *Phys. Rev. D* **74**, 044028 (2006).
 - [31] C. Charmousis, T. Kolyvaris, and E. Papantonopoulos, *Classical Quantum Gravity* **26**, 175012 (2009).
 - [32] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **05** (2014) 039.
 - [33] A. Anabalón and H. Maeda, *Phys. Rev. D* **81**, 041501 (2010).
 - [34] J. Barrientos and A. Cisterna, *Phys. Rev. D* **108**, 024059 (2023).

- [35] A. Cisterna, A. Neira-Gallegos, J. Oliva, and S. C. Rebolledo-Caceres, *Phys. Rev. D* **103**, 064050 (2021).
- [36] N. Caceres, J. Figueroa, J. Oliva, M. Oyarzo, and R. Stuardo, *J. High Energy Phys.* **04** (2020) 157.
- [37] A. Anabalon and A. Cisterna, *Phys. Rev. D* **85**, 084035 (2012).
- [38] C. Barcelo and M. Visser, *Classical Quantum Gravity* **17**, 3843 (2000).
- [39] E. Ayón-Beato, M. Hassaine, and J. A. Méndez-Zavaleta, *Phys. Rev. D* **92**, 024048 (2015).
- [40] J. Barrientos, P. A. González, and Y. Vásquez, *Eur. Phys. J. C* **76**, 677 (2016).
- [41] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 221101 (2014).
- [42] M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012).
- [43] E. Babichev and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **08** (2014) 106.
- [44] A. Anabalon, A. Cisterna, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 084050 (2014).
- [45] A. Cisterna and C. Erices, *Phys. Rev. D* **89**, 084038 (2014).
- [46] M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **89**, 064017 (2014).
- [47] T. Kobayashi and N. Tanahashi, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2014**, 073E02 (2014).
- [48] M. Minamitsuji and H. Motohashi, *Phys. Rev. D* **98**, 084027 (2018).
- [49] H. Motohashi and M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **99**, 064040 (2019).
- [50] M. Minamitsuji and J. Edholm, *Phys. Rev. D* **100**, 044053 (2019).
- [51] M. Minamitsuji and J. Edholm, *Phys. Rev. D* **101**, 044034 (2020).
- [52] J. Ben Achour and H. Liu, *Phys. Rev. D* **99**, 064042 (2019).
- [53] J. Ben Achour, H. Liu, and S. Mukohyama, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2020) 023.
- [54] J. Ben Achour, H. Liu, H. Motohashi, S. Mukohyama, and K. Noui, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2020) 001.
- [55] C. Charmousis, M. Crisostomi, R. Gregory, and N. Stergioulas, *Phys. Rev. D* **100**, 084020 (2019).
- [56] T. Anson, E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **01** (2021) 018.
- [57] O. Baake, C. Charmousis, M. Hassaine, and M. San Juan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2021) 021.
- [58] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, and N. Lecoeur, *J. High Energy Phys.* **08** (2022) 055.
- [59] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, *Phys. Rev. D* **106**, 064039 (2022).
- [60] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, *Phys. Rev. D* **108**, 024019 (2023).
- [61] E. Babichev, C. Charmousis, and N. Lecoeur, *arXiv*: 2309.12229.
- [62] N. Chatzifotis, E. Papantonopoulos, and C. Vlachos, *Phys. Rev. D* **105**, 064025 (2022).
- [63] A. Bakopoulos, N. Chatzifotis, C. Erices, and E. Papantonopoulos, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2023) 055.
- [64] E. Babichev, C. Charmousis, and A. Lehébel, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2017) 027.
- [65] A. Bakopoulos, C. Charmousis, and P. Kanti, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2022) 022.
- [66] C. Charmousis, A. Lehébel, E. Smyrniotis, and N. Stergioulas, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2022) 033.
- [67] E. Babichev, C. Charmousis, A. Cisterna, and M. Hassaine, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2020) 049.
- [68] C. Herdeiro, E. Radu, and H. Rúnarsson, *Classical Quantum Gravity* **33**, 154001 (2016).
- [69] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131103 (2018).
- [70] D. D. Doneva, S. Kiorpelidi, P. G. Nedkova, E. Papantonopoulos, and S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. D* **98**, 104056 (2018).
- [71] H. O. Silva, J. Sakstein, L. Gualtieri, T. P. Sotiriou, and E. Berti, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131104 (2018).
- [72] H. Guo, S. Kiorpelidi, X. M. Kuang, E. Papantonopoulos, B. Wang, and J. P. Wu, *Phys. Rev. D* **102**, 084029 (2020).
- [73] S. Kiorpelidi, T. Karakasis, G. Koutsoumbas, and E. Papantonopoulos, *Phys. Rev. D* **109**, 024033 (2024).
- [74] M. Minamitsuji and T. Ikeda, *Phys. Rev. D* **99**, 044017 (2019).
- [75] Y. Brihaye, C. Herdeiro, and E. Radu, *Phys. Lett. B* **788**, 295 (2019).
- [76] C. A. R. Herdeiro, E. Radu, H. O. Silva, T. P. Sotiriou, and N. Yunes, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 011103 (2021).
- [77] E. Berti, L. G. Collodel, B. Kleihaus, and J. Kunz, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 011104 (2021).
- [78] Y. Brihaye and Y. Verbin, *Phys. Rev. D* **102**, 124021 (2020).
- [79] Y. Brihaye and B. Hartmann, *Phys. Lett. B* **792**, 244 (2019).
- [80] S. Barton, B. Hartmann, B. Kleihaus, and J. Kunz, *Phys. Lett. B* **817**, 136336 (2021).
- [81] F. M. Ramazanoğlu, *Phys. Rev. D* **96**, 064009 (2017).
- [82] M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **101**, 104044 (2020).
- [83] T. Ikeda, T. Nakamura, and M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **100**, 104014 (2019).
- [84] F. M. Ramazanoğlu, *Phys. Rev. D* **99**, 084015 (2019).
- [85] Y. Brihaye, B. Hartmann, N. P. Aprile, and J. Urrestilla, *Phys. Rev. D* **101**, 124016 (2020).
- [86] Y. Brihaye, C. Herdeiro, and E. Radu, *Phys. Lett. B* **802**, 135269 (2020).
- [87] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [88] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998); *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999).
- [89] S. W. Hawking and D. N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983).
- [90] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998).
- [91] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).
- [92] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoeur, and T. Nakas, *Phys. Rev. D* **109**, 024032 (2024).
- [93] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009).
- [94] E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2015) 031.
- [95] D. Lovelock, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **12**, 498 (1971).
- [96] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2656 (1985).
- [97] J. Oliva and S. Ray, *Classical Quantum Gravity* **27**, 225002 (2010).
- [98] A. Cisterna, L. Guajardo, M. Hassaine, and J. Oliva, *J. High Energy Phys.* **04** (2017) 066.
- [99] P. Bueno and P. A. Cano, *Phys. Rev. D* **94**, 104005 (2016).

- [100] P. Bueno and P. A. Cano, [Phys. Rev. D **94**, 124051 \(2016\)](#).
- [101] P. Bueno, P. A. Cano, V. S. Min, and M. R. Visser, [Phys. Rev. D **95**, 044010 \(2017\)](#).
- [102] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, and R. B. Mann, [Phys. Rev. D **95**, 104042 \(2017\)](#).
- [103] A. Cisterna, N. Grandi, and J. Oliva, [Phys. Lett. B **805**, 135435 \(2020\)](#).
- [104] J. Moreno and Á. J. Murcia, [Phys. Rev. D **108**, 044016 \(2023\)](#).
- [105] P. Bueno, P. A. Cano, J. Moreno, and Á. Murcia, [J. High Energy Phys. **11** \(2019\) 062](#).
- [106] P. D. Mannheim and D. Kazanas, [Astrophys. J. **342**, 635 \(1989\)](#).
- [107] N. Cáceres, C. Corral, F. Diaz, and R. Olea, [arXiv:2311.04054](#).
- [108] D. Kubiznak, R. B. Mann, and M. Teo, [Classical Quantum Gravity **34**, 063001 \(2017\)](#).

Capítulo 4

Teorías de Proca generalizadas

El capítulo anterior desarrolló la construcción de teorías escalares–tensoriales más generales que la Relatividad General, partiendo de la acción de Horndeski y extendiéndola mediante transformaciones disformales. Un programa análogo puede llevarse a cabo cuando el campo mediador no es un escalar sino un campo vectorial masivo de espín 1. Esta analogía no es meramente formal: la estructura matemática que garantiza la ausencia de inestabilidades de Ostrogradsky en el caso escalar tiene un paralelo preciso en el caso vectorial, y la construcción resultante se conoce como teoría de *Proca generalizada*.

4.1 De Maxwell a Proca

En el caso sin masa, un campo vectorial A_μ está descrito por la acción de Maxwell, que posee invariancia de gauge $U(1)$: la teoría es invariante bajo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi$. Esta simetría elimina el modo longitudinal y deja solo dos grados de libertad físicos (los dos modos transversales de polarización). La introducción de un término de masa rompe explícitamente esta simetría de gauge, permitiendo la propagación del modo longitudinal y elevando el conteo a tres grados de libertad físicos. La acción resultante es la acción de Proca,

$$S_{\text{Proca}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right), \quad (4.1.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Faraday.

Para ver que la acción (4.1.1) propaga exactamente tres grados de libertad, se descompone el cuadrivector $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ en su componente temporal A_0 y sus tres componentes espaciales $\vec{A}$. El término cinético $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ contiene derivadas temporales de $\vec{A}$ pero no de A_0 , de modo que A_0 no es una variable dinámica independiente: su ecuación de movimiento es un vínculo algebraico que lo determina en términos de $\vec{A}$ y reduce el número de grados de libertad propagantes de cuatro a tres. Adicionalmente, las ecuaciones de movimiento implican la

condición de Lorentz $\nabla^\mu A_\mu = 0$, que en el caso masivo no es una fijación de gauge sino una consecuencia dinámica de la teoría, confirmando que solo tres modos se propagan.

4.2 Proca generalizada: construcción y acción

De manera análoga a como la teoría de Horndeski representa la extensión más general de las teorías escalares–tensoriales con ecuaciones de movimiento de segundo orden, las teorías de Proca generalizadas constituyen la extensión más general de la teoría de Proca que mantiene exactamente tres grados de libertad propagantes sin introducir inestabilidades de Ostrogradsky [79, 80]. La acción más general en espacio curvo que satisface estas condiciones puede escribirse como

$$S_{\text{GP}} = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_i, \quad (4.2.1)$$

donde los términos $\mathcal{L}_i$ son los análogos vectoriales de los términos de Horndeski. Su forma explícita es [79, 80]

$$\mathcal{L}_2 = G_2(Y, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}), \quad (4.2.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(Y) \nabla_\mu A^\mu, \quad (4.2.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(Y) R + G_{4Y} [(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho], \quad (4.2.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(Y) G_{\mu\nu} \nabla^\mu A^\nu - \frac{G_{5Y}}{6} [(\nabla_\mu A^\mu)^3 - 3 \nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\gamma \nabla_\gamma A^\rho], \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{L}_6 = G_6(Y) L^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma, \quad (4.2.6)$$

donde $Y = -\frac{1}{2} A_\mu A^\mu$ es el análogo vectorial del término cinético escalar X , $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ es el dual de Hodge del tensor de Faraday, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $L^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Levi-Civita doble, y las funciones $G_i(Y)$ son funciones arbitrarias del invariante Y . La notación $G_{iY} \equiv \partial G_i / \partial Y$ sigue la misma convención que en la teoría de Horndeski.

La analogía estructural con la acción de Horndeski (3.1.8) es manifiesta: los términos $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_5$ tienen exactamente la misma forma que sus contrapartes escalares con la sustitución $\phi \rightarrow A_\mu$ y $\partial_\mu \phi \rightarrow \nabla_\mu A_\nu$, mientras que el término $\mathcal{L}_6$, sin análogo escalar, emerge de la estructura tensorial adicional que posee un campo vectorial respecto a uno escalar. La función G_2 en (4.2.2) puede depender además de los invariantes del tensor de Faraday $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, lo que no tiene contraparte en el caso escalar y refleja la riqueza adicional de la estructura del campo vectorial.

4.3 Ausencia de inestabilidades y conteo de grados de libertad

El mecanismo que garantiza la estabilidad de la teoría (4.2.1) es análogo al de beyond Horndeski: la existencia de un vínculo primario asociado a la componente temporal A_0 que elimina el grado de libertad no físico. En la teoría de Proca estándar este vínculo proviene directamente de las ecuaciones de movimiento; en las teorías de Proca generalizadas, la estructura específica de los términos $\mathcal{L}_i$ está diseñada para preservar este vínculo a pesar de la presencia de interacciones derivativas de orden superior [80]. En otras palabras, los términos adicionales respecto a la acción de Proca estándar están contruidos precisamente de modo que no destruyan el carácter no dinámico de A_0 , garantizando así que el conteo de grados de libertad se mantenga en tres.

Una forma de entender esta estructura de manera transparente es mediante el truco de Stückelberg, introduciendo un campo escalar π a través de la sustitución

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{m} \partial_\mu \pi. \quad (4.3.1)$$

En el límite en que el campo vectorial se reduce a su modo longitudinal ($A_\mu \sim \partial_\mu \pi/m$), las interacciones de la teoría de Proca generalizada reproducen exactamente las interacciones de tipo Galileon escalar de la teoría de Horndeski [79]. Esta correspondencia confirma que las teorías de Proca generalizadas son la extensión vectorial natural de las teorías de Galileones, y que su consistencia está garantizada por la misma estructura matemática que subyace a la teoría de Horndeski.

4.4 Soluciones rotantes con pelo primario en Proca generalizada

Un resultado reciente de particular relevancia para esta tesis es la construcción de soluciones analíticas exactas de agujeros negros *rotantes* asintóticamente planos con pelo primario en el marco de la Proca generalizada [81]. La rareza de soluciones rotantes exactas en gravedad modificada hace de este resultado un avance significativo: fuera de la Relatividad General, solo un puñado de soluciones rotantes analíticas y asintóticamente planas son conocidas, y la mayoría corresponden a métricas de Kerr stealth [82, 83].

4.4.1 Subclase de Proca y ansatz de Kerr-Schild

La teoría considerada en [81] es la subclase de Proca generalizada motivada por regularizaciones dimensionales de los invariantes de Lovelock a cuatro dimensiones [84, 85], cuya

acción está parametrizada únicamente por las funciones $G_2(Y)$, $G_3(Y)$ y $G_4(Y)$,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [G_2(Y) + G_3(Y) \nabla_\mu A^\mu + G_4(Y) R + G_{4Y} ((\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho)], \quad (4.4.1)$$

donde $Y = -\frac{1}{2} A_\mu A^\mu$. Esta subclase incluye como caso particular la teoría de Proca de gravedad de Gauss-Bonnet cuatridimensional [84], que corresponde a la elección

$$G_2 = -24Y^2, \quad G_3 = -16Y, \quad G_4 = -4Y, \quad (4.4.2)$$

y más generalmente a las funciones inducidas por la regularización del n -ésimo invariante de Lovelock [85],

$$G_2^{(n)} = -6 \cdot 2^n (n-1) Y^n, \quad G_3^{(n)} = -2^{n+1} n Y^{n-1}, \quad G_4^{(n)} = -2^{n-1} \frac{n}{2n-3} Y^{n-1}. \quad (4.4.3)$$

Para la búsqueda de soluciones rotantes, se emplea un ansatz de Kerr-Schild en coordenadas de Kerr entrantes,

$$ds^2 = -(1 - 2\Phi)(l_\mu dx^\mu)^2 + \Sigma(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2(dv + a \sin^2 \theta d\varphi)(dr + a \sin^2 \theta d\varphi), \quad (4.4.4)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $l_\mu dx^\mu = dv + a \sin^2 \theta d\varphi$, y a es el parámetro de rotación. La función escalar de Kerr-Schild se escribe en términos de una función de masa generalizada,

$$\Phi = \frac{rM(r, \theta)}{\Sigma}, \quad (4.4.5)$$

y el campo de Proca se toma alineado con la dirección nula l^μ ,

$$A_\mu dx^\mu = \frac{\mathcal{A}(r, \theta)}{\Sigma} l_\mu dx^\mu, \quad (4.4.6)$$

de modo que la condición $Y = 0$ se satisface on-shell. Esta alineación, análoga a la del campo electromagnético en la derivación estándar de la métrica de Kerr-Newman, es el ingrediente clave que hace el sistema de ecuaciones de campo integrable [81].

Trabajando con funciones expandidas en potencias de Y alrededor de $Y = 0$,

$$G_2 = \mathcal{O}(Y^2), \quad G_3 = \alpha c_{3,1} Y + \mathcal{O}(Y^2), \quad G_4 = 1 + \alpha c_{4,1} Y + \alpha^2 c_{4,2} Y^2 + \mathcal{O}(Y^3), \quad (4.4.7)$$

las ecuaciones de campo independientes se reducen a un sistema de tres ecuaciones cuya

compatibilidad implica

$$M = \mu + \alpha_{c4,1} \frac{\mathcal{A}^2}{2r\Sigma}, \quad (4.4.8)$$

donde μ es una constante de integración relacionada con la masa, junto con una ecuación diferencial para $\mathcal{A}(r, \theta)$ que determina el perfil del campo de Proca. Una vez resuelta esta ecuación, la métrica queda completamente determinada a través de (4.4.8). La función de integración libre que aparece al resolver la ecuación de $\mathcal{A}$ constituye el pelo primario de la solución.

4.4.2 No-circularidad y estructura del horizonte

Una característica destacada de las soluciones obtenidas en [81] es que, salvo en el caso de métricas de Kerr stealth, las geometrías resultantes son *no-circulares*: la función de masa $M(r, \theta)$ depende no trivialmente del ángulo polar, lo que implica que el horizonte de eventos no se sitúa a radio constante sino que su posición $H(\theta)$ varía con θ , satisfaciendo la condición

$$[H'(\theta)]^2 + \Delta|_{r=H(\theta)} = 0, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2rM(r, \theta), \quad (4.4.9)$$

con condiciones de contorno $H'(0) = H'(\pi) = 0$. Las propiedades de circularidad y su ruptura en teorías de gravedad modificada serán analizadas en detalle en la Sección 1.1.3.

La razón por la que estas soluciones evaden la circularidad puede entenderse directamente desde la estructura del campo de Proca. Como se discute en la Sección 1.1.3, un teorema establece que los agujeros negros en teorías de campo efectivas deben ser circulares bajo la hipótesis de que el campo de materia puede expresarse como combinación lineal de los vectores de Killing estacionario ξ^μ y azimutal ψ^μ [40]. El campo de Proca considerado aquí, alineado con la dirección nula l^μ del ansatz de Kerr-Schild, no satisface esta condición: $A_\mu \propto l_\mu$ no puede escribirse como combinación lineal de ξ^μ y ψ^μ , ya que l^μ es nulo mientras que los vectores de Killing son en general no nulos. Esta es precisamente la razón por la que las hipótesis del teorema quedan circunventadas, permitiendo que la función de masa dependa de θ y que el horizonte sea no esférico.

4.4.3 Extensión con constante cosmológica

Las soluciones de [81] son asintóticamente planas. Una generalización natural consiste en incluir una constante cosmológica Λ en la acción (4.4.1), lo que produce soluciones asintóticamente (anti-)de Sitter con pelo primario vectorial. Esta extensión, que constituye el resultado original de esta tesis, se presenta a continuación.

Rotating black holes with primary hair in five-dimensional generalized Proca theory

Mokhtar Hassaine^{1,*} and Ulises Hernandez-Vera^{1,†}

¹*Instituto de Matemáticas, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*

This work presents a new class of exact analytic rotating black hole solutions within five-dimensional generalized Proca theories. Through a Kerr-Schild ansatz where the Proca field is set along a null geodesic congruence, the non-linear field equations reduce to a consistent set of three master equations. This geometric configuration ensures that the vector field remains light-like on-shell, effectively restricting the theory's functional couplings to discrete constants and allowing for a fully analytic treatment. The resulting solutions, incorporating a cosmological constant and two independent angular momenta, exhibit primary hair given by an arbitrary function of the non-Killing angular coordinate. We identify several solution branches defined by specific algebraic relations between the Proca coupling constants, providing a significant generalization of the Myers-Perry family. Notably, the metric retains a Kerr-Schild form identical to the Myers-Perry representation, with an additional contribution constructed from the tensor product of the Proca one-form with itself.

I. INTRODUCTION

The inception of black hole physics can be traced back to the discovery of the Schwarzschild solution, a foundational milestone that revealed the static structure of spacetime around a spherical mass. However, the path toward understanding its rotating counterpart proved to be an exceptionally arduous one, spanning nearly half a century before the Kerr metric was finally unveiled [1]. This prolonged gap in the history of General Relativity underscores the formidable nature of the Einstein field equations which, even under the simplifying assumptions of stationarity and axial symmetry, remain a highly non-linear system of coupled partial differential equations. A transformative breakthrough in this field occurred with the realization that the Kerr metric, and subsequently the charged Kerr-Newman solution [2], could be expressed through the elegant and structurally powerful Kerr-Schild formulation, see [3] and [4]. This framework expresses the physical metric as a linear perturbation of a background or “seed” metric through the introduction of a scalar profile function and a null, geodesic vector field. In these classical cases, the seed metric is Minkowski space, and the geometry is generated by a null, geodesic, and shear-free congruence. According to the Kerr theorem, an infinite variety of analytic functions can produce these congruences, meaning that selecting the precise function for the Kerr geometry typically requires knowing the solution beforehand. A stationary-axisymmetric version of the theorem formulated in [5] resolves this degeneracy. By establishing a rigorous, symmetry-based selection rule, this framework systematically identifies the unique congruence underpinning the Kerr solution, eliminating the need for ad hoc assumptions.

The utility of the linear Kerr-Schild structure extends well beyond four dimensions. Indeed, the Myers-Perry solution [6] and its generalizations with a cosmological constant [7, 8], which extend the Kerr-(A)dS geometry to higher dimensions with multiple rotation planes, also admit a Kerr-Schild representation. This indicates that the ansatz captures a fundamental property of the gravitational field for rotating objects, effectively linearizing the field equations regardless of the spacetime dimensionality. While the Kerr-Schild ansatz extends straightforwardly to higher-dimensional vacuum solutions [6] or those with a cosmological constant [7, 8], the inclusion of matter fields represents a completely different challenge. A major hurdle in this direction is the derivation of a five-dimensional analogue of the Kerr-Newman solution, which remains one of the most persistent open problems in the field. Within pure Einstein-Maxwell theory, no general exact analytic solution for a rotating charged black hole has been found to date. This gap in our knowledge is only partially bridged by the realization that the inclusion of a Chern-Simons term (a hallmark of five-dimensional supergravity) allows for the existence of charged rotating solutions [9]. It is worth noting that, in many instances, these solutions were originally derived through alternative methods rather than the Kerr-Schild ansatz itself. However, it was subsequently demonstrated that they can indeed be cast into a generalized or extended Kerr-Schild framework, which necessitates the introduction of two scalar profile functions and a spacelike vector field orthogonal to the null geodesic field [10]. A pivotal observation in this direction was recently highlighted by the work in Ref. [11], which recognized that the efficacy of the Kerr-Schild ansatz can be preserved even when navigating complex matter content. Specifically, by enforcing a configuration where the Proca field is strictly aligned

* hassaine@inst-mat.utalca.cl

† uhernandez.vera@gmail.com

with the null geodesic congruence of the geometry, Fernandes demonstrated that the ansatz remains remarkably powerful for deriving exact analytic solutions within a broad class of generalized Proca theories [11]. These solutions are of particular interest because they possess "primary hair" and break the circularity condition.

The core objective of this work is to determine whether the framework developed in [11] for four-dimensional generalized Proca theories can be extended to higher dimensions, taking the five-dimensional case as a first step. This extension is far from automatic; the transition from four to five dimensions introduces significant structural challenges. A classic example of this sensitivity is found in Einstein-Maxwell theory, where the Kerr-Schild ansatz successfully yields the 4D Kerr-Newman solution but fails to produce its rotating, charged counterpart in 5D. This demonstrates how strongly the analytic tractability of these systems depends on both dimensionality and gauge field couplings. Furthermore, five dimensions introduce a more intricate rotational structure due to the existence of two independent angular momenta. To navigate this technical complexity, we leverage known higher-dimensional Kerr-Schild representations of vacuum or (A)dS solutions. Our goal is to test whether the robust features of the 4D solutions, namely their analytic tractability and the emergence of primary hair, persist in this 5D environment.

The remainder of this paper is organized as follows. In Sec. II, we define the five-dimensional generalized Proca action. Sec. II-A is devoted to the implementation of the Kerr-Schild ansatz, where we introduce the five-dimensional seed metric and the null geodesic congruence. We derive the master field equations and highlight the resulting nested Kerr-Schild structure. The analytic solutions are presented across different coupling regimes in Sec. II-B, followed by an analysis of the event horizon properties and the role of primary hair in Sec. II-C. We also extend our framework to the toroidal ($\kappa = 0$) case and provide a formal proof of the mathematical obstruction that arises when the standard Maxwell kinetic term (or its non linear extension) is included in five dimensions. Sec. III is devoted to our conclusions and perspective.

II. FIVE-DIMENSIONAL GENERALIZED PROCA THEORY AND ITS KERR-SCHILD ANSATZ

In this work, we explore the gravitational dynamics of a five-dimensional vector field A_μ non-minimally coupled to curvature within the framework of generalized Proca theories. The action under consideration is generically defined by

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left(\sum_{n=2}^4 \mathcal{L}_n \right), \quad (2.1)$$

where the Lagrangian is decomposed into three distinct sectors, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, and $\mathcal{L}_4$, each representing different orders of derivatives and non-minimal couplings. The specific functional forms of the Lagrangians read

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= G_2(X), \\ \mathcal{L}_3 &= G_3(X) \nabla_\mu A^\mu, \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(X) R + G_{4X}(X) [(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho], \end{aligned} \quad (2.2)$$

where $X \equiv -A_\mu A^\mu/2$ denotes the norm of the vector field. The functions $G_n(X)$ with $n = 2, 3$ and 4 are arbitrary functions of this norm, and G_{nX} represents the derivative of G_n with respect to X . It is important to emphasize that this action represents a specific and physically motivated sub-class of the much broader family of theories described in the seminal work on the generalization of the Proca action [12]. By construction, this structure ensures that the resulting equations of motion remain strictly second-order for both the metric and the vector field. This property is crucial as it avoids the introduction of ghost-like degrees of freedom associated with Ostrogradski instabilities, which typically plague higher-derivative theories, while simultaneously maintaining a non-trivial non-minimal coupling to the Ricci scalar R .

Our investigation of these specific Lagrangians is strongly motivated by earlier works [13] as well as by recent developments in the study of regularized Proca theories in four dimensions. In the four-dimensional case, it has been demonstrated that such theories admit static and spherically symmetric black hole solutions characterized by the presence of primary hair [14]. Note that the structure of these Proca Lagrangians is conceptually similar to the regularized frameworks of four-dimensional Gauss-Bonnet gravity [15–19]. Another surprising and notable feature of these generalized Proca theories is the existence of static black hole solutions for which a cosmological constant appears as a constant of integration. This provides an effective vacuum energy that governs the asymptotic behaviour of the spacetime even in the complete absence of a bare cosmological term in the original action, suggesting a novel mechanism for self-acceleration or de Sitter-like expansions [20]. Interest in these generalized Proca theories can be further explored in several recent works. Specifically, the construction of exact rotating black holes with primary

hair was recently advanced in [11]. Additionally, the observational and perturbative signatures of such Proca hair, including double-peak optics and echoes, have been analysed in [21, 22]. Further extensions involving regularized Lovelock-Proca corrections and their cosmological implications can be found in [23]. To conclude, let us mention that there also exists a more general action than (2.1) involving, for example, a possible coupling to the Gauss-Bonnet density $\mathcal{G}$. In this context, a recent study [24] has explored spontaneously vectorized black holes in Einstein-vector-Gauss-Bonnet theory, demonstrating that these solutions can carry electric charges or magnetic dipole moments and typically possess lower free energy than their general relativistic counterparts.

It is imperative to highlight a deliberate and significant choice in our current formulation, namely the action presented in Eq. (2.1) does not include the standard Maxwell kinetic term, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Its absence here is not an oversight but a strategic necessity for the analytic framework we are developing. In the context of the Kerr-Schild ansatz and the specific vector configurations we seek to extend to five dimensions, the inclusion of the standard Maxwell field strength introduces a severe mathematical obstruction. This obstruction manifests as a fundamental incompatibility that arises specifically in higher dimensions when one insists on a vector field configuration where the potential is proportional to the null geodesic congruence ($A \propto l$). Unlike the four-dimensional case, where such an alignment is perfectly consistent with the Maxwell equations and allows for the derivation of the Kerr-Newman solution, this is no longer true in five dimensions. We shall provide a detailed discussion of this obstruction in the subsequent sections, demonstrating why the ‘‘Proca-style’’ derivative couplings used here allow for a degree of integrability and analytic tractability that is lost when the standard Maxwell kinetic term is strictly enforced. By avoiding the Maxwell term while keeping the theory ghost-free through the generalized Proca framework, we open a window into a new class of rotating solutions in five dimensions that would otherwise be probably inaccessible.

The field equations obtained by varying the action with respect to the metric $g^{\mu\nu}$ and the vector field A_μ respectively read $E_{\mu\nu} = 0$ and $\mathcal{J}_A^\mu = 0$ where

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} &:= \mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_2)} + \mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_3)} + \mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_4)}, \\
\mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_2)} &:= -\frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} G_2 + A_\mu A_\nu G_{2X} \right), \\
\mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_3)} &:= \frac{G_{3X}}{2} \left(2\nabla_{(\mu} [A^\alpha] A_{\nu)} A_\alpha - A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha - g_{\mu\nu} A^\alpha A^\beta \nabla_\beta A_\alpha \right), \\
\mathcal{E}_{\mu\nu}^{(G_4)} &:= G_4 G_{\mu\nu} + G_{4X} \left(R_{(\mu|\alpha|} A_{\nu)} A^\alpha - g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta + R_{\mu\alpha\nu\beta} A^\alpha A^\beta - \frac{1}{2} A_\mu A_\nu R \right. \\
&\quad \left. + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta (A^\alpha A^\beta) - \nabla_{(\mu} \nabla_{\beta} [A_{\nu)} A^\beta] + \frac{\square(A_\mu A_\nu)}{2} + g_{\mu\nu} \square(X) - \nabla_\mu \nabla_\nu (X) \right) \\
&\quad + G_{4XX} \left(\frac{1}{2} A_\mu A_\nu [(\nabla_\alpha A_\beta)^2 - (\nabla A)^2] - [A_{(\mu} \nabla^{\beta} A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta] A^\alpha \nabla_\alpha A_\beta \right. \\
&\quad \left. + 2 g_{\mu\nu} \nabla_\beta (A^{[\beta} A^{\alpha]} \nabla_\alpha (X) - 2 \nabla_{(\mu} (X) A_{\nu)} \nabla_\beta (A^\beta) - \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \nabla_\alpha (X) A^\alpha - \nabla_\mu (X) \nabla_\nu (X) \right), \\
\mathcal{J}_A^\mu &:= -A^\mu G_{2X} + (A^\alpha \nabla^\mu (A_\alpha) - \nabla^\alpha (A_\alpha) A^\mu) G_{3X} + 2G_\alpha^\mu A^\alpha G_{4X} \\
&\quad + \left(A^\mu (\nabla_\alpha A_\gamma)^2 - A^\mu (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 + 2A^\alpha [\nabla_\sigma A^\sigma \nabla^\mu A_\alpha - \nabla_\sigma A_\alpha \nabla^\mu A^\sigma] G_{4XX} \right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A. The Kerr-Schild ansatz

To address the analytical challenges posed by the field equations in five-dimensional generalized Proca theories, we employ a solution strategy based on the Kerr-Schild framework. Our construction assumes that the physical spacetime geometry can be decomposed into a background or seed metric, modified by a linear perturbation that depends on a scalar profile function and a specific vector field. In doing so, we define the following seed metric

$$ds_0^2 = -\frac{(1 - \lambda r^2) \Delta_\theta}{\Xi_a \Xi_b} dt^2 + \frac{\Sigma(r, \theta) r^2}{(1 - \lambda r^2) (r^2 + a^2) (r^2 + b^2)} dr^2 + \frac{\Sigma(r, \theta)}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2) \sin^2(\theta)}{\Xi_a} d\phi^2 + \frac{(r^2 + b^2) \cos^2(\theta)}{\Xi_b} d\psi^2 \tag{2.4}$$

and, where for simplicity, we have defined

$$\Delta_\theta = 1 + \lambda a^2 \cos^2(\theta) + \lambda b^2 \sin^2(\theta), \quad \Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta), \quad \Xi_a = 1 + \lambda a^2, \quad \Xi_b = 1 + \lambda b^2. \tag{2.5}$$

It is straightforward to verify that the seed metric (2.4) satisfies the five-dimensional Einstein field equations in the presence of a cosmological constant λ , namely

$$G_{\mu\nu} + 6\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

In order to implement the Kerr-Schild ansatz, we also need a null and geodesic vector which reads in this case

$$\ell = \frac{\Delta_\theta}{\Xi_a \Xi_b} dt + \frac{r^2 \Sigma(r, \theta)}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)(r^2 + b^2)} dr - \frac{a}{\Xi_a} \sin^2(\theta) d\phi - \frac{b}{\Xi_b} \cos^2(\theta) d\psi.$$

Leveraging the geometric properties of the seed metric and the associated null geodesic congruence, we adopt the following extended Kerr-Schild ansatz inspired by the four-dimensional case [11]

$$ds^2 = ds_0^2 + h_1(r, \theta) \ell \otimes \ell, \quad A = h_2(r, \theta) \ell. \quad (2.7)$$

By implementing this specific ansatz, where the Proca field is strictly aligned with the null generators of the spacetime, the complexity of the field equations is dramatically reduced. A fundamental consequence of this alignment is that the vector field norm, $X \equiv -A_\mu A^\mu/2$, vanishes identically on-shell. Because all the coupling functions $G_n(X)$ and their derivatives are evaluated exactly at $X = 0$, these expressions collapse from arbitrary functional forms into discrete constants, rather than maintaining any non-trivial dependence on the coordinates r and θ . Moreover, as in the four-dimensional case [11] the complete set of coupled Einstein-Proca equations can be condensed into a linear combination of just three fundamental master equations, two of them being exact total derivatives

$$E_{rr} := \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Sigma \left(h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1 \right) - P(r, \theta) (12 G_4 \lambda + G_2) \right\} \quad (2.8)$$

$$E_{\theta\theta} := \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \Sigma \left(h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1 \right) \right\}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{J}^r = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\Sigma G_{4X} h_1 \right) + \frac{\Sigma}{\Sigma + 2r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\Sigma r h_2 G_{3X} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left((\Sigma + 2r^2) h_2^2 G_{4XX} \right) + r \Sigma (G_{2X} + \lambda G_{4X}) \right) \right], \quad (2.10)$$

where

$$P(r, \theta) = \int \frac{\Sigma(r, \theta)^2 r}{\Sigma(r, \theta) + 2r^2} dr. \quad (2.11)$$

Consequently, this triad of equations captures the entire dynamical content of the theory under the chosen ansatz. Ensuring that these specific relations are satisfied is sufficient to guarantee that the full system of field equations is identically fulfilled, thereby reducing a formidable set of non-linear partial differential equations to a more manageable integrable core.

Now, since $\partial_{r\theta}^2 P(r, \theta) \neq 0$, the two first equations $E_{rr} = 0 = E_{\theta\theta}$ will be compatible if and only if

$$G_2(X) = -12\lambda G_4(X), \quad (2.12)$$

and, hence these first two equations will be satisfied provided that

$$h_1(r, \theta) = \frac{M}{\Sigma} + \frac{h_2(r, \theta)^2 G_{4X}}{G_4}, \quad (2.13)$$

with M an integration constant proportional to the mass. It is particularly illuminating to observe that the specific form of the metric function h_1 , as given by (2.13), allows the geometry to be expressed through a nested Kerr-Schild decomposition. Specifically, our ansatz can be recast in the following suggestive form

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{M}{\Sigma} \ell \otimes \ell + \frac{G_{4X}}{G_4} A \otimes A, \quad A = h_2(r, \theta) \ell. \quad (2.14)$$

This representation highlights a remarkable structural hierarchy. The first part of the metric, $ds_{MP}^2 = ds_0^2 + \frac{M}{\Sigma} \ell \otimes \ell$, is precisely the Kerr-Schild representation of the (AdS)-Myers-Perry solution [6–8]. In this light, our solution can be interpreted as a further linear deformation of the Myers-Perry background, where the “perturbing” agent is the Proca one-form A . This nesting is possible because the Proca field is strictly aligned with the same null congruence ℓ that generates the rotating vacuum geometry.

The remaining independent field equation, $\mathcal{J}^r = 0$, serves to uniquely determine the functional form of the profile $h_2(r, \theta)$, equation that reads

$$\mathcal{J}^r = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Sigma G_{4X}^2 h_2^2}{G_4} \right) + \frac{\Sigma}{\Sigma + 2r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r h_2 G_{3X}) + \frac{\partial}{\partial r} ((\Sigma + 2r^2) h_2^2 G_{4XX}) \right) \right]. \quad (2.15)$$

To solve this equation analytically, we investigate the behaviour of the generalized Proca action in the vicinity of the vanishing kinetic norm, $X = 0$. Under the assumption that the coupling functions $G_3(X)$ and $G_4(X)$ are sufficiently smooth to admit a Taylor series expansion, and identifying G_2 through the compatibility constraint (2.12), we consider the following expansions

$$G_3(X) = \alpha c_{31} X + \mathcal{O}(X^2), \quad G_4(X) = 1 + \alpha c_{41} X + \alpha^2 c_{42} X^2 + \mathcal{O}(X^3), \quad G_2(X) = -12\lambda G_4(X). \quad (2.16)$$

Crucially, we contend that higher-order powers of X beyond those explicitly presented in (2.16) do not contribute to the essential physics of the model. By substituting the perturbative expansions for the coupling functions $G_n(X)$ into (2.15), the governing equation for the profile function $h_2(r, \theta)$ can be recast as a first-order non-linear differential equation

$$\frac{\partial h_2}{\partial r} + \frac{\alpha h_2 c_{31} \Sigma (\Sigma + 2r^2) + 6r h_2^2 \alpha^2 [2c_{42} \Sigma + \frac{1}{3} c_{41}^2 (\Sigma + 2r^2)]}{\Sigma [2h_2 \alpha^2 (\Sigma + 2r^2) (2c_{42} + c_{41}^2) + \Sigma r \alpha c_{31}]} = 0. \quad (2.17)$$

B. Analytic solutions for different coupling regimes

To obtain reasonably simple analytic forms for the remaining field equation (2.17), we restrict our analysis to specific parameter space configurations. By imposing particular algebraic relations among the coupling constants $\{c_{31}, c_{41}, c_{42}\}$, we are able to reduce the governing first-order differential equation to integrable cases. This approach follows the logic successfully applied in the four-dimensional context [11, 25], where such constraints allowed for the discovery of closed-form solutions that clearly illustrate the physical impact of the Proca hair. In the following, we explore three relevant regimes that lead to distinct classes of analytic expressions. Notably, across all three cases, the system consistently preserves an arbitrary function denoted $\mathcal{F}_1(\theta)$. This functional freedom arises because the governing partial differential equation (2.17) involves exclusive radial derivative, leaving the angular dependence unfixed. Crucially, as shown below, this remaining freedom will prove instrumental in ensuring the existence of a well-defined event horizon.

- **Case I: The coupling choice** $c_{42} = -c_{41}^2/2$.

This specific parameter choice simplifies the structural complexity of the equation (2.17). Indeed, enforcing the relation $c_{42} = -c_{41}^2/2$ cancels a dominant term in the denominator of the governing differential equation, significantly reducing its algebraic structure. Upon integration, this simplified differential equation yields a solution characterized by logarithmic dependences,

$$h_2(r, \theta) = \frac{c_{31} \Sigma (r^2 - \Sigma)^2}{r [2\alpha c_{41}^2 \Sigma^2 \ln(\Sigma) + \mathcal{F}_1(\theta) c_{31} \Sigma^2 (r^2 - \Sigma)^2 - 4\alpha c_{41}^2 (\Sigma^2 \ln(r) + \frac{3}{4} (r^2 - \Sigma)(\frac{r^2}{3} - \Sigma))]}. \quad (2.18)$$

- **Case II: Vanishing linear G_4 derivative** $c_{41} = 0$. **Stealth on (AdS)-Myers-Perry black hole.**

When the linear correction to the G_4 function is suppressed (2.16), from equation (2.13), we have

$$h_1(r, \theta) = \frac{M}{\Sigma},$$

and this is nothing but the Kerr-Schild function for the (AdS)-Myers-Perry black hole solution in five dimensions. Hence, the solution reduces to a stealth defined in the Myers-Perry spacetime where the vector potential $A = h_2(r, \theta) \ell$ with

$$h_2(r, \theta) = \frac{\sqrt{c_{31}^2 r^2 \Sigma^2 - 8\alpha c_{42} \mathcal{F}_1(\theta) (\Sigma + 2r^2)} - c_{31} r \Sigma}{4\alpha c_{42} (\Sigma + 2r^2)}. \quad (2.19)$$

As in the four-dimensional case, this solution turns out to be circular and generalizes those found in four dimensions in [11] and [25].

• **Case III: Vanishing G_3 sector, $c_{31} = 0$**

In the absence of the G_3 coupling constant, the field equation simplifies to a separable form, yielding a power-law solution

$$h_2(r, \theta) = \mathcal{F}_1(\theta) \Sigma^{-\left(\frac{c_{41}^2}{2(2c_{42} + c_{41}^2)}\right)} [\Sigma + 2r^2]^{\left(-\frac{c_{42}}{2c_{42} + c_{41}^2}\right)}. \quad (2.20)$$

This solution highlights how the Proca hair scales with the radial structural function Σ under the influence of higher-order G_4 corrections.

– **Case III-a: Vanishing G_3 sector, $c_{31} = 0$ with $c_{42} = 0$**

It is particularly interesting to analyse the specific case where $c_{42} = 0$ in addition to $c_{31} = 0$, which leads to the simplification $h_2 = \mathcal{F}_1(\theta)/\sqrt{\Sigma}$. Under these conditions, the nested Kerr-Schild structure (2.14) collapses into a single-vector deformation of the seed metric

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2}{\Sigma} \ell \otimes \ell, \quad A = \frac{\mathcal{F}_1(\theta)}{\sqrt{\Sigma}} \ell. \quad (2.21)$$

This simplified form reveals two distinct physical regimes depending on the nature of the arbitrary function $\mathcal{F}_1(\theta)$. First, if we consider $\mathcal{F}_1(\theta) = q$ (a constant), the metric reduces exactly to the (AdS)-Myers-Perry solution, but with a shifted mass parameter $M_{eff} = M + \alpha c_{41} q^2$. In this regime, the Proca field behaves as a "stealth" configuration; it possesses its own dynamics and supports the geometry, yet the resulting spacetime remains indistinguishable from the standard vacuum solution. Second, when $\mathcal{F}_1(\theta)$ is a non-trivial function of the angular coordinate, the solution departs from the vacuum (or AdS) Myers-Perry family. While the metric maintains the formal structure of a standard Kerr-Schild ansatz, the θ -dependence in the scalar function introduces a profound shift in the underlying symmetries. Specifically, this non-constant primary hair breaks the circularity condition, providing a concrete example of how the generalized Proca terms allow for analytic, rotating configurations that bypass the rigid symmetry constraints typically imposed on stationary black holes in General Relativity.

C. Some properties of the solutions

Regarding the existence and location of the event horizon for these solutions, we restrict ourselves, for simplicity, to the asymptotically flat case ($\lambda = 0$). We begin by considering the reduced solution obtained from (2.21) by setting $c_{31} = c_{42} = 0$. In this case, the position of the horizon is determined by the condition $g^{rr} = 0$. This leads to a quartic equation for the radial coordinate, whose θ -dependent root defines the horizon radius $r_h(\theta)$

$$(r^2 + a^2)(r^2 + b^2) - r^2 (M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2) = 0. \quad (2.22)$$

The largest real root of this equation, corresponding to the outer event horizon, is explicitly given by

$$r_h(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2 - (a^2 + b^2) + \sqrt{[M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2 - (a + b)^2][M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2 - (a - b)^2]}}. \quad (2.23)$$

In order for the horizon to be well-defined, the above expression must be real for all $\theta \in [0, \pi]$. This requirement imposes the constraint

$$M + \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2 \geq \max \left\{ (a + b)^2, (a - b)^2 \right\}, \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (2.24)$$

This condition ensures the positivity of the argument of the square root, thereby excluding the formation of naked singularities. Owing to the functional freedom in the choice of $\mathcal{F}_1(\theta)$, this inequality can always be satisfied by an appropriate tuning of the Proca field profile.

A similar analysis can be carried out for the solution (2.20), for which the location of the event horizon is determined implicitly by the condition

$$H(r, \theta) := (r^2 + a^2)(r^2 + b^2) - Mr^2 - r^2 \alpha c_{41} \mathcal{F}_1(\theta)^2 \left(\frac{\Sigma}{\Sigma + 2r^2} \right)^{\frac{2c_{42}}{2c_{42} + c_{41}^2}} = 0.$$

The asymptotic behaviour of the function is readily obtained as

$$H(r, \theta) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^4 > 0,$$

which ensures that $H(r, \theta)$ is positive for sufficiently large values of r . Moreover, by choosing for instance

$$\mathcal{F}_1(\theta) = \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{\alpha c_{41}}} \left[\frac{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + 3 + b^2}{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + 1 + b^2} \right]^{\frac{c_{42}}{2c_{42} + c_{41}^2}}, \quad (2.25)$$

one obtains (provided that $M > 0$)

$$H(1, \theta) = -M < 0, \quad \forall \theta.$$

Since $H(r, \theta)$ is continuous with respect to r , the intermediate value theorem ensures that, for each fixed θ , the equation $H(r, \theta) = 0$ admits at least one solution in $(1, \infty)$. To further characterize the set of roots, we analyse the radial derivative. One finds that

$$\partial_r H(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} +\infty,$$

independently of θ . Consequently, there exists $R > 0$ such that

$$\partial_r H(r, \theta) > 0, \quad \forall r \geq R, \quad \forall \theta,$$

so that $H(r, \theta)$ is strictly increasing on (R, ∞) . Let

$$\mathcal{Z}_\theta = \{r > 1 \mid H(r, \theta) = 0\}.$$

From the previous discussion, $\mathcal{Z}_\theta$ is non-empty. Furthermore, since $H(r, \theta)$ is strictly increasing for $r \geq R$, it admits at most one zero in (R, ∞) . It follows that $\mathcal{Z}_\theta$ is bounded from above, and we can define

$$r_+(\theta) := \sup \mathcal{Z}_\theta.$$

By continuity of H , one has $H(r_+(\theta), \theta) = 0$, so that $r_+(\theta)$ is the largest root of the equation. Finally, due to the strict monotonicity of H on (R, ∞) , it admits at most one zero in this interval. In particular, if a root exists in (R, ∞) , it is unique. Otherwise, all the roots lie in the interval $(1, R]$, and $r_+(\theta)$ remains well-defined as the largest root, although no uniqueness can be inferred in this region.

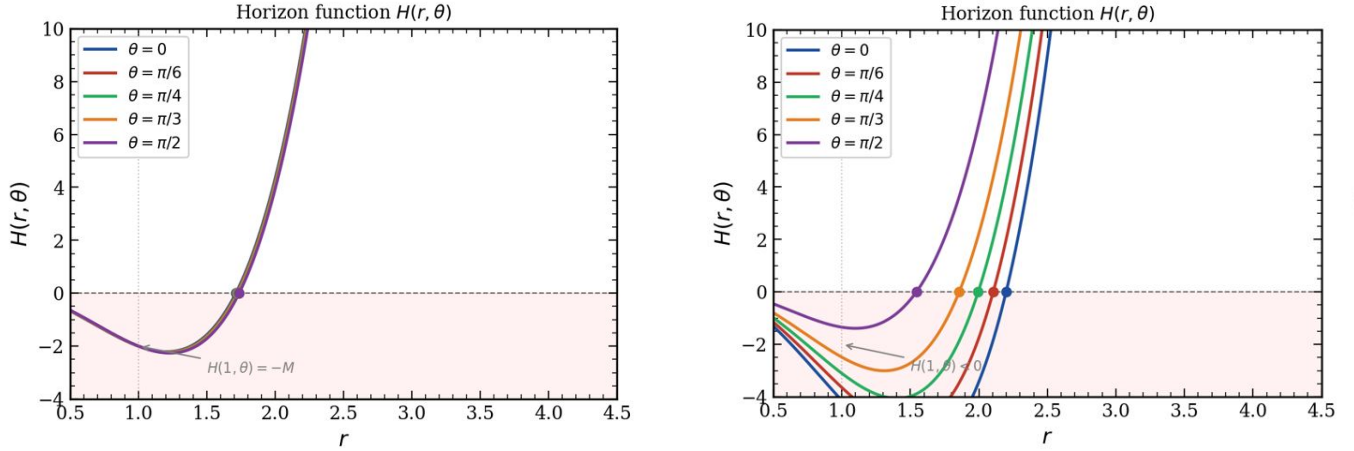


FIG. 1. Horizon function $H(r, \theta)$ for five values of the polar angle $\theta \in \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$, with parameters $a = 0.8$, $b = 0.5$, $M = 2$, $\alpha = c_{41} = 1$, $c_{42} = 0.5$. *Left panel:* Analytic choice of $\mathcal{F}_1(\theta)$ from Eq. (2.25), for which $H(1, \theta) = -M$ exactly for all θ (vertical dotted line at $r = 1$), demonstrating that the hypotheses of the intermediate value theorem are satisfied. *Right panel:* Illustrative choice $\mathcal{F}_1(\theta) = 1.5 + \cos \theta$, showing a pronounced angular dependence of the outer horizon $r_+(\theta)$ (filled circles). In both cases, the shaded region indicates $H < 0$.

Another noteworthy observation is that these solutions admit a natural extension to the toroidal case ($\kappa = 0$) within the Kerr–Schild framework. The systematic study of toroidal, and more generally topological, black holes was originally developed in four-dimensional Anti-de Sitter (AdS) gravity [26–28]. These works demonstrated that the sign of the sectional curvature κ plays a fundamental role in shaping both the causal structure and the thermodynamic properties of the resulting spacetimes. Extending this perspective to five dimensions provides a non-trivial arena to test the robustness of the primary Proca hair under modifications of the horizon topology and asymptotic structure. In the planar case $\kappa = 0$, the seed metric ds_0^2 corresponds to a flat Lorentzian manifold endowed with toroidal topology, and the null geodesic vector ℓ is naturally adapted to Cartesian-like coordinates on the torus. The Kerr–Schild ansatz then takes the form

$$ds^2 = -(-\lambda r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(-\lambda r^2)} + r^2(d\theta^2 + dx^2 + dy^2) + h_1(r, \theta)\ell \otimes \ell, \quad A = h_2(r, \theta)\ell, \\ \ell = \sqrt{1 - \text{sgn}(\lambda)(a^2 + b^2)}dt + \frac{dr}{(-\lambda r^2)} - \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}(a dx + b dy). \quad (2.26)$$

Substituting this ansatz into the field equations, one obtains

$$h_1(r, \theta) = \frac{M}{r^2} + \frac{h_2(r, \theta)^2 G_{4X}}{G_4}, \quad (2.27)$$

so that the metric can be recast in the compact Kerr–Schild form

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{M}{r^2}\ell \otimes \ell + \frac{G_{4X}}{G_4}A \otimes A, \quad A = h_2(r, \theta)\ell. \quad (2.28)$$

Within this geometry, the remaining non-trivial field equation, namely $\mathcal{J}^r = 0$, remarkably reduces to a total derivative,

$$\mathcal{J}^r = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{3r^2(G_{4X}^2 + G_{4XX}G_4)h_2^2 + G_{3X}h_2r^3G_4 + 3G_{4X}MG_4}{G_4} \right\}. \quad (2.29)$$

This structure allows for a direct integration of the field equations. Making use of the perturbative expansions of the coupling functions $G_n(X)$ introduced in (2.16), one can determine the radial profile $h_2(r, \theta)$ explicitly. The general solution is found to be

$$h_2(r, \theta) = \frac{\sqrt{r^4 c_{31}^2 \mathcal{F}_1^2(\theta) + 12\alpha(2c_{42} + c_{41}^2) - r^2 c_{31} \mathcal{F}_1(\theta)}}{6\alpha(2c_{42} + c_{41}^2) \mathcal{F}_1(\theta) r}. \quad (2.30)$$

The validity of this expression requires the denominator to be non-vanishing, which imposes the condition $c_{42} \neq -c_{41}^2/2$. This special parameter choice corresponds to a bifurcation point in the solution space and must therefore be treated separately. Indeed, setting $c_{42} = -c_{41}^2/2$ and analysing the field equations, one finds that the profile function simplifies considerably, yielding a power-law behaviour of the form

$$h_2(r, \theta) = \frac{\mathcal{F}_1(\theta)}{r^3}. \quad (2.31)$$

In both branches of the solution space, the function $\mathcal{F}_1(\theta)$ arises as an arbitrary integration function depending solely on the angular coordinate, reflecting the persistence of a non-trivial angular structure associated with the Proca hair.

To end this section, we look to the action (2.1) supplemented by the Maxwell term $\epsilon F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ by adopting the same ansatz (2.7). Without any loss of generality we can restrict ourselves to the case without cosmological constant and with $G_2 = 0$. In this case, the equations of motion for the gauge field A_μ are modified accordingly. In particular, the radial component of the current becomes

$$\mathcal{J}_\epsilon^r = \mathcal{J}^r + \epsilon \frac{\partial}{\partial r} (P(r, \theta)) \nabla_\nu (F^{r\nu}),$$

where $\mathcal{J}^r$ and $P(r, \theta)$ are defined respectively in (2.10) and in (2.11). On the other hand, new components of the vector field equation $\mathcal{J}^\mu = 0$ arise, and are given by

$$\mathcal{J}_\epsilon^\phi + \frac{a}{r^2 + a^2} \mathcal{J}_\epsilon^r \propto \epsilon \left(\nabla_\nu (F^{\phi\nu}) + \frac{a}{r^2 + a^2} \nabla_\nu (F^{r\nu}) \right), \\ \mathcal{J}_\epsilon^\psi + \frac{b}{r^2 + b^2} \mathcal{J}_\epsilon^r \propto \epsilon \left(\nabla_\nu (F^{\psi\nu}) + \frac{b}{r^2 + b^2} \nabla_\nu (F^{r\nu}) \right), \\ \mathcal{J}_\epsilon^t + \mathcal{J}_\epsilon^r \propto \epsilon \nabla_\nu (F^{t\nu} + F^{r\nu}), \quad \mathcal{J}_\epsilon^\theta \propto \epsilon \nabla_\nu (F^{\theta\nu}).$$

From these equations, and considering suitable linear combinations among them, it is possible to isolate a relation that determines the function $h_2(r, \theta)$ valid for $\epsilon \neq 0$ as

$$h_2(r, \theta) = -\frac{Q}{\Sigma}.$$

As well, the equations arising from the Einstein sector are also modified. In particular, the relevant equations take the following form

$$\begin{aligned} E_{rr\epsilon} &:= \frac{\partial}{\partial r} [\Sigma (h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1)] + \frac{\epsilon r}{2(\Sigma + 2r^2)} \left(\Sigma^2 \frac{\partial}{\partial r} (h_2)^2 - 4 h_2^2 (r^2 - \Sigma) \right), \\ E_{\theta\theta\epsilon} &:= \frac{\partial}{\partial \theta} [\Sigma (h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1)] - \epsilon h_2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\Sigma h_2). \end{aligned}$$

It is important to observe that, upon substituting the previously obtained expression for h_2 into these last two equations, the compatibility condition $\partial_\theta E_{rr\epsilon} - \partial_r E_{\theta\theta\epsilon} = 0$ is valid only if $Q = 0$. Therefore, the standard Maxwell framework is strictly incompatible with this setup, as consistency requires turning off the function h_2 , which equates to a trivial vector field. In the static case, it was shown in [25] that this restriction can be circumvented by considering non-linear electrodynamics of the form $(-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^p$, [29, 30]. Motivated by this, we investigate whether introducing such a non-linear Maxwell framework can similarly restore compatibility when rotation is included. However, as we demonstrate below, this mechanism fails to produce consistent non-trivial solutions in the rotating regime. So let us consider the following Lagrangian

$$\mathcal{L} = \epsilon (-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^p, \quad p \neq 1.$$

As in the standard Maxwell case, the non-trivial $\mathcal{J}^\mu = 0$ equations are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon^r &= \mathcal{J}^r + \epsilon \frac{\partial}{\partial r} (P(r, \theta)) \nabla_\nu (F^{r\nu} \mathcal{F}^p), \\ \mathcal{J}_\epsilon^\phi + \frac{a}{r^2 + a^2} \mathcal{J}_\epsilon^r &\propto \epsilon \left(\nabla_\nu (F^{\phi\nu} \mathcal{F}^p) + \frac{a}{r^2 + a^2} \nabla_\nu (F^{r\nu} \mathcal{F}^p) \right), \\ \mathcal{J}_\epsilon^\psi + \frac{b}{r^2 + b^2} \mathcal{J}_\epsilon^r &\propto \epsilon \left(\nabla_\nu (F^{\psi\nu} \mathcal{F}^p) + \frac{b}{r^2 + b^2} \nabla_\nu (F^{r\nu} \mathcal{F}^p) \right), \\ \mathcal{J}_\epsilon^t + \mathcal{J}_\epsilon^r &\propto \epsilon \nabla_\nu ([F^{t\nu} + F^{r\nu}] \mathcal{F}^p), \quad \mathcal{J}_\epsilon^\theta \propto \epsilon \nabla_\nu (F^{\theta\nu} \mathcal{F}^p). \end{aligned}$$

where $\mathcal{F} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Now, as in the previous case, an appropriate linear combination of the generalized Maxwell equation yields the following equation

$$\left[\Sigma^2 (\partial_r h_2)^2 - 4 (\Sigma - r^2) h_2^2 \right]^{p-1} (\Sigma \partial_r h_2 + 2r h_2) = 0. \quad (2.32)$$

This equation admits two non-trivial solutions which arise from setting each factor to zero independently. The first is obtained by requiring $\Sigma \partial_r h_2 + 2r h_2 = 0$, which recovers the solution found previously, this is $h_2 = \mathcal{F}_1(\theta)/\Sigma$, where the remaining Maxwell equations further constrain $\mathcal{F}_1(\theta)$ to be a constant. The second non-trivial branch $p \neq 1$ arises from the vanishing of the first factor, yielding

$$h_2(r, \theta) = \mathcal{F}_1(\theta) e^{\pm 2 \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{\Sigma(r, \theta) - r^2}}\right)}. \quad (2.33)$$

On the other hand, the master equations take the form

$$\begin{aligned} E_{\theta\theta\epsilon} &:= \frac{\partial}{\partial \theta} [\Sigma (h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1)] + \epsilon (-1)^p p 2^{(p-1)} h_2 \left[\Sigma^2 (\partial_r h_2)^2 - 4 (\Sigma - r^2) h_2^2 \right]^{p-1} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Sigma h_2), \\ E_{rr\epsilon} &:= \frac{\partial}{\partial r} [\Sigma (h_2^2 G_{4X} - G_4 h_1)] + \\ &\quad \epsilon \frac{(-1)^{p+1} (2p-1) 2^{p-2} r \left[\Sigma^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial r} \right)^2 - 4 (\Sigma - r^2) h_2^2 \right]^{p-1} \left[\Sigma^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial r} \right)^2 - \frac{4}{2p-1} (\Sigma - r^2) h_2^2 \right]}{(\Sigma + 2r^2) \Sigma^{2(p-1)}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

It is worth noting that the ϵ -dependent terms in both equations contain precisely the factor that vanishes for the solution found above, see Eq. (2.33). Consequently, these terms do not contribute, and the equation for h_1 reduces to (2.13). On the other hand, since

$$\mathcal{J}_\epsilon^r = \mathcal{J}^r + \epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(P(r, \theta) \right) \nabla_\nu (F^{r\nu} \mathcal{F}^p), \quad (2.35)$$

the expression $h_2 = \mathcal{F}_1(\theta) e^{\pm 2 \arctan(r/\sqrt{\Sigma-r^2})}$ cancels the ϵ -dependent contribution identically, as shown above. However, the remaining piece $\mathcal{J}^r = 0$ must still be satisfied independently. Evaluating this equation with

$$h_1(r, \theta) = \frac{M}{\Sigma} + \frac{h_2(r, \theta)^2 G_{4X}}{G_4},$$

one finds that none of the analytic solutions obtained in Section II B for $\mathcal{J}^r = 0$ are compatible with the exponential form of h_2 above (2.33). Consequently, this branch does not yield a consistent solution within the generalized Proca theory for generic coupling functions, and must therefore be discarded.

III. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

In this work, we have constructed a new class of exact rotating black hole solutions in five-dimensional generalized Proca theories. The key ingredient is a Kerr–Schild ansatz in which the Proca vector field is aligned with a null geodesic congruence as done in [11]. This choice considerably simplifies the field equations, reducing them to a set of three coupled equations that can be solved analytically. In particular, the alignment ensures that the vector field is light-like on-shell, so that the functional couplings in the Proca Lagrangian effectively behave as constants, allowing us to bypass much of the usual technical difficulty.

The solutions describe black holes with two independent angular momenta and can be constructed for different horizon topologies, including the spherical ($\kappa = 1$) and planar ($\kappa = 0$) cases. Obtaining analytic rotating solutions in higher dimensions with multiple rotation parameters is typically very challenging, especially in modified gravity where the field equations are highly non-linear and often lead to coupled partial differential equations. In many situations, one has to rely on numerical methods or perturbative approaches. In contrast, the Kerr–Schild framework used here allows for a fully analytic treatment, even in the presence of a cosmological constant, illustrating its effectiveness for exploring non-linear gravitational configurations.

A distinctive and particularly intriguing feature of these solutions is the emergence of primary hair, in close analogy with what has been observed in four-dimensional Proca models [11]. All the solution branches identified in this work, with the exception of the stealth configuration, are characterized by the presence of an arbitrary integration function $\mathcal{F}_1(\theta)$. This functional freedom arises naturally from the structure of the reduced field equations, which are effectively radial and therefore do not fully constrain the angular dependence. Beyond its mathematical origin, this arbitrariness plays an important role at the physical level. In particular, it provides a mechanism to ensure the existence of a regular event horizon. As shown in the previous analysis, by an appropriate choice of the angular profile $\mathcal{F}_1(\theta)$, one can control the sign of the function $H(r, \theta)$ and guarantee the presence of at least one positive root, which can be identified with the horizon radius. Moreover, combined with the asymptotic properties of $H(r, \theta)$, this freedom can be used to ensure that such a root corresponds to a well-defined outer event horizon. In this sense, the Proca hair is not merely a by-product of the integration procedure, but rather a crucial ingredient in the construction of physically acceptable black hole geometries. At the same time, the presence of this arbitrary function points to a non-trivial degeneracy in the space of solutions, which is absent in standard General Relativity. Different choices of $\mathcal{F}_1(\theta)$ may lead to geometries with distinct physical properties, raising the question of whether all such configurations should be regarded as physically equivalent. Clarifying the status of this “hair” therefore requires further investigation. In particular, it will be important to determine whether $\mathcal{F}_1(\theta)$ encodes a genuine physical degree of freedom, or whether it can be constrained, or even completely fixed, by imposing additional physical requirements, such as regularity at the horizon, stability under linear perturbations, or suitable asymptotic fall-off conditions. Understanding these aspects is essential for assessing the physical relevance of the solutions presented here and for establishing whether the associated Proca hair can play an observable role in higher-dimensional gravitational systems.

Several natural directions for future work follow from our results. A first step would be to extend these solutions to an arbitrary number of dimensions, in order to make contact with the general Myers–Perry family and obtain a broader picture of rotating Proca black holes in higher dimensions. In addition, since our solutions are five-dimensional, it would be interesting to explore them in the context of the $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ correspondence [31]. In particular, one could investigate how these configurations with Proca hair are encoded in the dual field theory and whether they lead to new features on the holographic side. Another natural direction for future work arises from the non-circular nature of

our rotating Proca solutions. It would be of great interest to investigate whether the Proca vector field $\mathcal{A}_\mu$ could be employed to generate a disformal transformation of the metric, $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu$, in order to bring the spacetime into a circular form. This approach is motivated by the scalar field case; while starting from a stealth configuration on a Kerr background [32] generally breaks circularity [33, 34], there exist other scalar field solutions where the circularity of the metric can be preserved or restored through suitable disformal mappings [35]. Applying a similar logic to the Proca case would allow us to determine if the vector field can be tuned to restore circularity, potentially leading to new classes of exact rotating solutions. Also, our analysis has shown that the inclusion of a standard Maxwell term in these generalized Proca theories, whether in four or five dimensions, appears to be incompatible with the Kerr-Schild ansatz. While we extended this investigation to include non-linear electrodynamics of the $(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^p$ type, the results remained similarly constrained. Consequently, a promising next step would be to explore a broader class of frameworks, such as the recently classified Degenerate Higher-Order Maxwell-Einstein (DHOME) theories [36–38]. It remains to be seen whether specific sub-sectors within this classification might accommodate such a construction while preserving the consistency of the Kerr-Schild framework.

Finally, the success of the Kerr-Schild ansatz in the generalized Proca sector provides a powerful proof of concept for other alternative theories of gravity. In particular, scalar-tensor theories, where the search for exact rotating solutions has proven to be exceedingly tricky and often elusive, could benefit from a similar approach. Understanding the precise limits and conditions under which the Kerr-Schild ansatz “works” in modified gravity will be essential for discovering new analytic backgrounds, which are indispensable for testing the limits of modified gravity theories.

ACKNOWLEDGMENTS

The work of M. H. is partially supported by FONDECYT grant 1260479. U. H. V. thanks CINVESTAV, Mexico, for its warm hospitality during the development of this work.

-
- [1] R. P. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
 - [2] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, Metric of a Rotating, Charged Mass, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).
 - [3] R. P. Kerr and A. Schild, Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations, *Gen. Rel. Grav.* **41**, 2485 (2009).
 - [4] G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations, *J. Math. Phys.* **10**, 1842 (1969).
 - [5] E. Ayón-Beato, M. Hassaine, and D. Higuera-Borja, Role of symmetries in the Kerr-Schild derivation of the Kerr black hole, *Phys. Rev. D* **94**, 064073 (2016), [Addendum: *Phys. Rev. D* 96, 049902 (2017)], [arXiv:1512.06870 \[hep-th\]](#).
 - [6] R. C. Myers and M. J. Perry, Black Holes in Higher Dimensional Space-Times, *Annals Phys.* **172**, 304 (1986).
 - [7] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, Rotating black holes in higher dimensions with a cosmological constant, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171102 (2004), [arXiv:hep-th/0409155](#).
 - [8] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, The General Kerr-de Sitter metrics in all dimensions, *J. Geom. Phys.* **53**, 49 (2005), [arXiv:hep-th/0404008](#).
 - [9] Z. W. Chong, M. Cvetič, H. Lu, and C. N. Pope, General non-extremal rotating black holes in minimal five-dimensional gauged supergravity, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 161301 (2005), [arXiv:hep-th/0506029](#).
 - [10] A. N. Aliev and D. K. Ciftci, A Note on Rotating Charged Black Holes in Einstein-Maxwell-Chern-Simons Theory, *Phys. Rev. D* **79**, 044004 (2009), [arXiv:0811.3948 \[hep-th\]](#).
 - [11] P. G. S. Fernandes, Exact analytic rotating black-hole solutions with primary hair (2026), [arXiv:2601.21163 \[gr-qc\]](#).
 - [12] L. Heisenberg, Generalization of the Proca Action, *JCAP* **05**, 015, [arXiv:1402.7026 \[hep-th\]](#).
 - [13] E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, Black holes and solitons in an extended Proca theory, *JHEP* **05**, 114, [arXiv:1703.07676 \[gr-qc\]](#).
 - [14] C. Charmousis, P. G. S. Fernandes, and M. Hassaine, Proca theory of four-dimensional regularized Gauss-Bonnet gravity and black holes with primary hair, *Phys. Rev. D* **111**, 124008 (2025), [arXiv:2504.13084 \[gr-qc\]](#).
 - [15] D. Glavan and C. Lin, Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 081301 (2020), [arXiv:1905.03601 \[gr-qc\]](#).
 - [16] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, Derivation of Regularized Field Equations for the Einstein-Gauss-Bonnet Theory in Four Dimensions, *Phys. Rev. D* **102**, 024025 (2020), [arXiv:2004.08362 \[gr-qc\]](#).
 - [17] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, R. B. Mann, and C. Pollack, On taking the $D \rightarrow 4$ limit of Gauss-Bonnet gravity: theory and solutions, *JHEP* **07**, 027, [arXiv:2004.09472 \[gr-qc\]](#).
 - [18] P. G. S. Fernandes, Gravity with a generalized conformal scalar field: theory and solutions, *Phys. Rev. D* **103**, 104065 (2021), [arXiv:2105.04687 \[gr-qc\]](#).

- [19] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review, *Class. Quant. Grav.* **39**, 063001 (2022), [arXiv:2202.13908 \[gr-qc\]](#).
- [20] C. Charmousis, P. G. S. Fernandes, and M. Hassaine, An effective cosmological constant as black hole primary hair (2026), [arXiv:2603.25598 \[gr-qc\]](#).
- [21] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Primary hairs may create echoes, *Phys. Lett. B* **872**, 140108 (2026), [arXiv:2508.13069 \[gr-qc\]](#).
- [22] R. A. Konoplya, D. Ovchinnikov, and J. Schee, Primary Proca hair and the double-peak optics of black holes, *Phys. Rev. D* **113**, 024059 (2026), [arXiv:2510.05947 \[gr-qc\]](#).
- [23] P. G. S. Fernandes, J. Gou, L. Heisenberg, and N. Nussbaumer, Inflation, black holes with primary hair, and regular planar black holes from an infinite tower of regularized Lovelock-Proca corrections (2025), [arXiv:2511.22798 \[gr-qc\]](#).
- [24] B. Kleihaus and J. Kunz, Stationary Einstein-vector-Gauss-Bonnet black holes (2026), [arXiv:2604.04568 \[gr-qc\]](#).
- [25] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva, and M. Rinaldi, Static and rotating solutions for Vector-Galileon theories, *Phys. Rev. D* **94**, 104039 (2016), [arXiv:1609.03430 \[gr-qc\]](#).
- [26] J. P. S. Lemos, Cylindrical black hole in general relativity, *Phys. Lett. B* **353**, 46 (1995), [arXiv:gr-qc/9404041](#).
- [27] D. Klemm, V. Moretti, and L. Vanzo, Rotating topological black holes, *Phys. Rev. D* **57**, 6127 (1998), [Erratum: *Phys.Rev.D* 60, 109902 (1999)], [arXiv:gr-qc/9710123](#).
- [28] D. Birmingham, Topological black holes in Anti-de Sitter space, *Class. Quant. Grav.* **16**, 1197 (1999), [arXiv:hep-th/9808032](#).
- [29] M. Hassaine and C. Martinez, Higher-dimensional black holes with a conformally invariant Maxwell source, *Phys. Rev. D* **75**, 027502 (2007), [arXiv:hep-th/0701058](#).
- [30] M. Hassaine and C. Martinez, Higher-dimensional charged black holes solutions with a nonlinear electrodynamics source, *Class. Quant. Grav.* **25**, 195023 (2008), [arXiv:0803.2946 \[hep-th\]](#).
- [31] J. M. Maldacena, The Large N limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998), [arXiv:hep-th/9711200](#).
- [32] C. Charmousis, M. Crisostomi, R. Gregory, and N. Stergioulas, Rotating Black Holes in Higher Order Gravity, *Phys. Rev. D* **100**, 084020 (2019), [arXiv:1903.05519 \[hep-th\]](#).
- [33] T. Anson, E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, Disforming the Kerr metric, *JHEP* **01**, 018, [arXiv:2006.06461 \[gr-qc\]](#).
- [34] J. Ben Achour, H. Liu, H. Motohashi, S. Mukohyama, and K. Noui, On rotating black holes in DHOST theories, *JCAP* **11**, 001, [arXiv:2006.07245 \[gr-qc\]](#).
- [35] J. Ben Achour, A. Cisterna, and H. Roussille, A circular Disformal Kerr black hole, *JCAP* **04**, 041, [arXiv:2512.19549 \[gr-qc\]](#).
- [36] A. Colléaux, D. Langlois, and K. Noui, Classification of generalised higher-order Einstein-Maxwell Lagrangians, *JHEP* **03**, 041, [arXiv:2312.14814 \[gr-qc\]](#).
- [37] A. Colléaux, D. Langlois, and K. Noui, Degenerate higher-order Maxwell theories in flat space-time, *JHEP* **10**, 218, [arXiv:2404.18715 \[gr-qc\]](#).
- [38] A. Colléaux and K. Noui, Degenerate higher-order Maxwell-Einstein theories, *JHEP* **10**, 007, [arXiv:2502.03311 \[gr-qc\]](#).

Capítulo 5

Termodinámica de agujeros negros

5.1 Termodinámica de agujeros negros

5.1.1 Leyes de la termodinámica

El origen de la termodinámica de agujeros negros se remonta a los trabajos de comienzos de la década de 1970. El punto de partida fue el teorema del área de Hawking [86], que establece que el área del horizonte de eventos de un agujero negro clásico no puede decrecer bajo evoluciones físicas razonables, sugiriendo así una analogía directa con la segunda ley de la termodinámica. Motivado por esta observación, Bekenstein [87] propuso que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte,

$$S = \eta \frac{A}{\hbar G}, \quad (5.1.1)$$

donde la constante η es fijada posteriormente mediante consideraciones cuánticas. Esta identificación resulta natural desde el punto de vista informacional: si un sistema con entropía es absorbido por un agujero negro, la entropía exterior disminuye, pero el área del horizonte crece, preservando una noción generalizada de segunda ley.

Bardeen, Carter y Hawking [88] sistematizaron estas ideas en las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros, cuya estructura formal es idéntica a la de las leyes de la termodinámica clásica. El papel de la temperatura es jugado por la *gravedad superficial* κ , que mide la aceleración propia de un observador estático en el horizonte. La *ley cero* establece precisamente que κ es constante sobre todo el horizonte de eventos, en analogía con el equilibrio térmico de la ley cero clásica. Las tres leyes restantes se corresponden con los principios fundamentales de la termodinámica: la *primera ley* relaciona variaciones de la masa con variaciones del

área, momento angular y carga,

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q, \quad (5.1.2)$$

en perfecta analogía con $dU = T dS + \text{trabajo}$; la *segunda ley* establece que el área no decrece, $\delta A \geq 0$, en correspondencia con el crecimiento de la entropía; y la *tercera ley* prohíbe alcanzar $\kappa = 0$ mediante un proceso físico finito, en analogía con la inalcanzabilidad del cero absoluto.

La correspondencia formal $T \sim \kappa$, $S \sim A$ adquiere contenido físico real al considerar efectos cuánticos: Hawking [89] demostró que un agujero negro emite radiación térmica a temperatura $T = \kappa/2\pi$, fijando así la constante $\eta = 1/4$ y convirtiendo la analogía en una identificación precisa. Aunque estas leyes fueron formuladas originalmente para agujeros negros estacionarios asintóticamente planos en cuatro dimensiones, se extienden de manera natural a dimensiones arbitrarias y a otras soluciones gravitacionales con horizonte [90, 91].

5.1.2 Temperatura de Hawking

Uno de los resultados más profundos en la física de agujeros negros es que, al considerar efectos cuánticos en un fondo gravitacional clásico, estos objetos no son completamente negros, sino que emiten radiación con un espectro térmico [89, 92]. Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos en espacios curvos, la noción de vacío depende del observador: la presencia de un horizonte de eventos implica que distintos observadores no concuerdan en la definición de partículas, de modo que un estado que es vacío para uno puede contener partículas para otro [93, 94]. Este efecto, conocido como efecto Unruh en el caso acelerado [95], da lugar en el contexto de agujeros negros a la emisión de radiación térmica desde el horizonte.

El resultado central establece que esta radiación es térmica, con una temperatura dada por

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi}, \quad (5.1.3)$$

donde κ es la gravedad superficial. Este resultado completa la analogía entre la mecánica de agujeros negros y la termodinámica, fijando la constante de proporcionalidad en la relación de Bekenstein y dando lugar a la entropía de Bekenstein–Hawking,

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4\hbar G}. \quad (5.1.4)$$

Resulta notable que estos resultados involucran simultáneamente las constantes $\hbar$, G y k_B ,

poniendo en contacto la relatividad general, la mecánica cuántica y la termodinámica. Asimismo, la entropía escala con el área del horizonte y no con el volumen, en contraste con los sistemas termodinámicos convencionales, anticipando la idea de que los grados de libertad relevantes residen en una dimensión menor.

Para una clase general de métricas estáticas y esféricamente simétricas,

$$ds^2 = -N(r)^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_k^2, \quad (5.1.5)$$

la temperatura se obtiene imponiendo regularidad de la geometría Euclidiana en el horizonte $r = r_h$, definido por $f(r_h) = 0$, y resulta

$$T = \frac{N(r_h) f'(r_h)}{4\pi}. \quad (5.1.6)$$

Como ejemplos ilustrativos consideramos dos casos canónicos. Para el agujero negro de Schwarzschild, con función métrica $f(r) = 1 - 2GM/r$ y $N(r) = 1$, la temperatura de Hawking es

$$T_{\text{Schw}} = \frac{1}{8\pi GM}, \quad (5.1.7)$$

lo cual exhibe una propiedad llamativa: la temperatura crece al disminuir la masa, de modo que el agujero negro se vuelve más caliente conforme se evapora, señalando una capacidad calorífica negativa y la ausencia de equilibrio termodinámico estable en espacio plano [89]. Para el agujero negro de Schwarzschild–anti-de Sitter (Schwarzschild-AdS), con función métrica $f(r) = 1 - 2GM/r - \Lambda r^2/3$ y $N(r) = 1$, la temperatura toma la forma

$$T_{\text{SAdS}} = \frac{1}{4\pi r_h} (1 - \Lambda r_h^2), \quad (5.1.8)$$

donde r_h es el radio del horizonte. A diferencia del caso asintóticamente plano, la presencia de la constante cosmológica negativa introduce una competencia entre los dos términos: para agujeros negros grandes (r_h grande) la temperatura crece con r_h , lo que implica una capacidad calorífica positiva y la posibilidad de equilibrio termodinámico estable. Este comportamiento es precisamente el que subyace a la transición de fase de Hawking–Page [96], que se discute más adelante. Como último ejemplo, cabe mencionar la solución de Bocharova–Bronnikov–Melnikov–Bekenstein (BBMB) [52, 53], correspondiente al primer agujero negro con pelo escalar en relatividad general acoplada a un campo escalar con acoplamiento conforme. Su función métrica es $f(r) = (1 - M/r)^2$, con un horizonte degenerado en $r_h = M$. Dado que $f'(r_h) = 0$, es inmediato de (5.1.6) que $T_{\text{BBMB}} = 0$.

5.1.3 Método de la acción euclidiana

Una formulación particularmente útil para el estudio de la termodinámica de agujeros negros es el formalismo euclidiano, desarrollado por Gibbons y Hawking [22]. En este enfoque, la función de partición de un sistema gravitacional se identifica con la integral de camino euclidiana,

$$Z = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi e^{-I_E[g,\phi]}, \quad (5.1.9)$$

donde I_E es la acción euclidiana obtenida mediante una rotación de Wick $t \rightarrow -i\tau$. En la aproximación semiclásica [18,22], la integral de camino está dominada por la solución clásica de las ecuaciones de movimiento, de modo que

$$Z \approx e^{-I_E^{\text{on-shell}}}. \quad (5.1.10)$$

La coordenada temporal euclidiana τ resulta periódica con período $\beta = T^{-1}$, condición que se impone para evitar singularidades cónicas en el horizonte [22] y que fija de manera única la temperatura del sistema, en completa consistencia con el resultado de Hawking.

La acción euclidiana evaluada en la solución clásica se relaciona con la energía libre del ensamble canónico [22,97],

$$I_E = \beta F = \beta \left(M - TS - \sum_i \Phi_i Q_i \right), \quad (5.1.11)$$

donde M es la masa, S la entropía y Q_i las cargas conservadas asociadas a los potenciales químicos Φ_i . A partir de esta relación, las cantidades termodinámicas se obtienen como derivadas de la acción,

$$S = \beta \frac{\partial I_E}{\partial \beta} - I_E, \quad (5.1.12)$$

$$Q_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial I_E}{\partial \Phi_i}, \quad (5.1.13)$$

$$M = \frac{\partial I_E}{\partial \beta} - \sum_i \frac{\Phi_i}{\beta} \frac{\partial I_E}{\partial \Phi_i}. \quad (5.1.14)$$

En su formulación hamiltoniana [98,99], la acción euclidiana toma la forma

$$I_E = \beta \int d^{D-1}x \sqrt{h} (N \mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i) + B, \quad (5.1.15)$$

donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_i$ son las restricciones hamiltonianas y B es un término de frontera. Al evaluar

en soluciones clásicas las restricciones se anulan, de modo que las cantidades físicas quedan completamente determinadas por contribuciones en el infinito y en el horizonte. El término de frontera B se fija exigiendo que el principio variacional esté bien definido, $\delta I_E = 0$, lo que permite identificar de forma consistente las cargas conservadas [100, 101]

Como ilustración, consideramos los dos ejemplos introducidos previamente. Para el agujero negro de Schwarzschild, la acción euclidiana on-shell evaluada con las condiciones de borde apropiadas [22] reproduce la energía libre $F = M/2$, de donde se obtienen la entropía $S = 4\pi GM^2 = A/4G$ y la temperatura $T = 1/8\pi GM$, en acuerdo con el resultado de Hawking. Para la solución BBMB [52, 53], cuyo horizonte es degenerado, la periodicidad β puede tomarse arbitraria sin generar singularidades cónicas, lo cual es consistente con $T = 0$ y refleja el carácter extremal de la solución. Sin embargo, la entropía no se anula: dado que la solución pertenece al marco de la relatividad general, la fórmula de Bekenstein–Hawking se aplica sin modificaciones y se obtiene $S = A/4G \neq 0$. Este resultado ilustra que la extremalidad no implica entropía nula, situación que ha motivado discusiones sobre el alcance de la tercera ley en el contexto de agujeros negros extremos [101, 102].

5.1.4 Transiciones de fase en espacios asintóticamente AdS

La presencia de una constante cosmológica negativa enriquece considerablemente la estructura termodinámica de los agujeros negros. En espacios asintóticamente anti-de Sitter (AdS), la propia geometría actúa como un sistema confinante, permitiendo definir de manera natural el ensamble canónico sin necesidad de introducir una caja térmica externa [96]. Esto hace posible el estudio de transiciones de fase gravitacionales en un marco bien definido.

El ejemplo paradigmático es la transición de Hawking–Page [96], que ocurre entre el agujero negro de Schwarzschild–AdS con horizonte esférico y el espacio AdS térmico. A bajas temperaturas, el estado dominante corresponde al AdS térmico, mientras que por encima de una temperatura crítica T_c el agujero negro se vuelve termodinámicamente favorecido, al minimizar la energía libre. Esta transición es de primer orden y está determinada por la condición

$$\Delta F = F_{\text{BH}} - F_{\text{AdS}} = 0. \quad (5.1.16)$$

Desde la perspectiva de la correspondencia AdS/CFT [23, 103], este fenómeno admite una interpretación dual como una transición de confinamiento/desconfinamiento en la teoría de campos conforme [104].

La estructura de fases depende fuertemente de la topología del horizonte. Para agujeros ne-

gros con horizontes planos ($k = 0$), no existe transición de Hawking–Page respecto al AdS térmico, ya que el agujero negro planar es termodinámicamente dominante para cualquier temperatura no nula.

Sin embargo, al compactificar una de las direcciones espaciales sobre un círculo de longitud L , emerge una nueva geometría de vacío: el *solitón de Horowitz–Myers* [105]. Este espacio posee energía negativa asociada a la energía de Casimir inducida por la topología compacta, y debe ser interpretado como el verdadero estado fundamental del sistema.

En este contexto, existe una transición de fase de primer orden entre el solitón y el agujero negro planar, determinada por la igualdad de sus energías libres. La temperatura crítica asociada depende de la longitud de compactificación y viene dada por

$$T_c = \frac{1}{2\pi L}. \quad (5.1.17)$$

Para $T > T_c$, el agujero negro es el estado termodinámicamente favorecido, mientras que para $T < T_c$, el solitón domina la dinámica del sistema. Este escenario resulta particularmente relevante para el análisis de los agujeros negros regulares planares considerados en esta tesis.

5.1.5 Extensiones de la entropía de Bekenstein–Hawking

La fórmula de Bekenstein–Hawking $S = A/4G$ es exacta en el marco de la relatividad general, pero recibe correcciones cuando se consideran teorías de gravedad modificada o efectos cuánticos. En esta subsección discutimos dos extensiones relevantes para esta tesis.

Entropía de Wald

En teorías de gravedad con Lagrangianos que dependen del tensor de Riemann y sus contracciones, la entropía no se obtiene simplemente como un cuarto del área del horizonte. Wald [90, 91] demostró que la entropía de un agujero negro en una teoría con Lagrangiano $\mathcal{L}$ puede obtenerse mediante la fórmula de Noether asociada a la simetría de difeomorfismos,

$$S_{\text{Wald}} = -2\pi \oint_{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} \hat{\epsilon}_{\mu\nu} \hat{\epsilon}_{\rho\sigma} d^{D-2}x, \quad (5.1.18)$$

donde $\hat{\epsilon}_{\mu\nu}$ es el binormal normalizado al horizonte $\mathcal{H}$. Esta fórmula reproduce $S = A/4G$ en relatividad general y proporciona la generalización correcta para teorías de curvatura superior. En particular, la presencia del término de Gauss–Bonnet introduce una contribución

logarítmica a la entropía de la forma

$$S = \frac{A}{4G} + \alpha \ln r_h, \quad (5.1.19)$$

donde α es proporcional al acoplamiento de Gauss–Bonnet [106]. Este tipo de corrección aparece explícitamente en el análisis termodinámico del caso esférico estudiado en esta tesis, donde el acoplamiento c_2 del término de Horndeski cuadrático juega precisamente este papel.

Fórmula de Cardy

La fórmula de Cardy [107] es un resultado de la teoría conforme de campos en dos dimensiones que relaciona la entropía microcanónica de un sistema con su energía y la carga central de la álgebra de Virasoro. En el contexto gravitacional, su relevancia surge de la correspondencia $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$: la entropía de agujeros negros en tres dimensiones puede reproducirse a partir de la densidad de estados de la CFT dual [108]. En dimensiones superiores, se han propuesto generalizaciones de tipo Cardy que permiten calcular la entropía de agujeros negros planares a partir de la masa del solitón asociado [109, 110]. Concretamente, dada la masa del solitón M_s , la entropía del agujero negro planar puede escribirse como

$$S = 3\pi (-2M_s)^{1/3} M^{2/3}, \quad (5.1.20)$$

resultado que se emplea directamente en el análisis termodinámico de los agujeros negros regulares planares estudiados en esta tesis, en acuerdo con el cálculo estándar vía acción euclidiana. Ambas extensiones —la entropía de Wald y la fórmula de Cardy— constituyen herramientas centrales en el análisis que se desarrolla en la siguiente sección, donde se estudia la termodinámica de agujeros negros regulares obtenidos a partir de una torre infinita de correcciones de curvatura en el marco de teorías de Horndeski.

5.2 Termodinámica de agujeros negros regulares

Las herramientas introducidas en las secciones anteriores permiten abordar de manera sistemática el estudio de la termodinámica de soluciones gravitacionales en presencia de una constante cosmológica negativa. En particular, el formalismo euclidiano proporciona un marco natural para definir el ensamble termodinámico, mientras que las cantidades físicas relevantes —como la masa, la entropía y la energía libre— pueden obtenerse a partir de la acción evaluada sobre la solución clásica.

En este contexto, resulta de especial interés analizar configuraciones en las cuales la geome-

tría del espacio-tiempo es modificada por la presencia de campos adicionales, como ocurre en teorías escalares–tensoriales. En particular, en esta tesis se consideran soluciones de agujeros negros regulares obtenidas a partir de una torre infinita de correcciones de curvatura efectivas, cuya dinámica puede ser reinterpretada dentro del marco de teorías de tipo Horndeski.

Un aspecto notable de estas soluciones es la existencia de distintas ramas, caracterizadas por perfiles escalares triviales y no triviales, que pueden presentar propiedades geométricas significativamente diferentes. Sin embargo, como se mostrará a continuación, dichas diferencias no necesariamente se reflejan en el comportamiento termodinámico del sistema.

En lo que sigue, se aplicará el método de la acción euclidiana para calcular las cantidades termodinámicas asociadas a estas soluciones. En particular, se pondrá énfasis en el rol de los términos de frontera, los cuales determinan completamente la masa y la entropía del sistema. Este análisis permitirá evidenciar la existencia de una degeneración termodinámica entre distintas ramas de soluciones, así como estudiar la estructura de fases en el caso de geometrías planares.

5.2.1 Singularidades y agujeros negros regulares

Uno de los resultados más profundos de la relatividad general es que, bajo condiciones físicas bastante generales, el colapso gravitacional conduce inevitablemente a la formación de singularidades espaciotemporales. Este resultado, conocido como los *teoremas de singularidades* de Penrose y Hawking [111–113], establece que siempre que se satisfagan ciertas condiciones de energía y existan superficies atrapadas, las geodésicas del espaciotiempo no pueden extenderse indefinidamente. Las singularidades se caracterizan por dos propiedades estrechamente relacionadas: la divergencia de los invariantes de curvatura, como el escalar de Kretschner $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, y la incompletitud geodésica, es decir, la existencia de trayectorias de partículas o rayos de luz que no pueden prolongarse más allá de un tiempo propio finito [114].

La presencia de singularidades señala una limitación fundamental de la relatividad general como teoría clásica: en su vecindad los efectos cuánticos gravitacionales se vuelven significativos y la teoría deja de ser predictiva. Aunque una teoría completa de gravedad cuántica permanece como un problema abierto, se han desarrollado modelos de gravedad modificada que admiten soluciones de agujeros negros que evitan estas singularidades, manteniendo al mismo tiempo las características esenciales de un agujero negro, como la presencia de un horizonte de eventos. Estas soluciones se denominan *agujeros negros regulares*.

El prototipo de agujero negro regular fue construido por Bardeen [115] y posteriormente derivado de un principio de acción en el contexto de la electrodinámica no lineal [116]. Desde entonces, se han construido soluciones regulares en diversos marcos teóricos, incluyendo teorías escalares-tensoriales de tipo DHOST [117, 118] y, más recientemente, en el contexto de teorías de curvatura superior [119], que es precisamente el marco relevante para el artículo estudiado en este capítulo. En la mayoría de los casos, sin embargo, estas soluciones requieren la inclusión de campos de materia exóticos o ajustes finos entre los parámetros de la teoría y la solución.

5.2.2 Criterio de Sakharov y núcleo de de Sitter

Una condición necesaria y suficiente para que un agujero negro esféricamente simétrico sea regular fue identificada por Sakharov [120] y es conocida como el *criterio de Sakharov*. Este criterio establece que para evitar la singularidad central, la geometría debe poseer un núcleo de de Sitter en el origen $r = 0$, es decir, la función métrica debe comportarse como

$$f(r) \sim 1 - \frac{r^2}{l_{\text{eff}}^2} + \mathcal{O}(r^4) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \quad (5.2.1)$$

donde l_{eff} es una longitud efectiva que caracteriza la escala a la cual los efectos de la gravedad modificada se vuelven relevantes. Este comportamiento garantiza que los invariantes de curvatura permanezcan finitos en el origen y que las geodésicas sean completas, es decir, que ninguna trayectoria física termine abruptamente en $r = 0$.

Físicamente, el núcleo de de Sitter reemplaza la singularidad central de los agujeros negros estándar —como la de Schwarzschild, donde $f(r) \sim -2M/r$ diverge en $r = 0$ — por una región interior que se comporta localmente como un espacio de de Sitter, con una densidad de energía efectiva constante y positiva que actúa como una constante cosmológica efectiva local. Esta región interior de de Sitter es la que proporciona la presión necesaria para evitar el colapso hacia la singularidad, en analogía con la repulsión cosmológica a escala macroscópica.

La formación natural de un núcleo de de Sitter es precisamente lo que ocurre al considerar la torre completa de correcciones de curvatura, como se discute en la subsección siguiente: en el límite $n \rightarrow \infty$ de la torre de Lovelock, la suma infinita de términos de curvatura genera efectivamente una constante cosmológica local en el origen, regularizando la geometría sin necesidad de campos de materia exóticos ni ajustes finos entre los parámetros de la teoría.

5.2.3 Torre infinita de correcciones de Lovelock y regularización dimensional

La teoría de Lovelock [121, 122] proporciona la generalización más natural de la relatividad general a dimensiones superiores: es la teoría gravitacional más general en d dimensiones que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden para la métrica. El Lagrangiano de Lovelock de orden n es

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2^n} \delta^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}_{\rho_1 \sigma_1 \dots \rho_n \sigma_n} R^{\rho_1 \sigma_1}_{\mu_1 \nu_1} \dots R^{\rho_n \sigma_n}_{\mu_n \nu_n}, \quad (5.2.2)$$

donde $\delta^{\mu_1 \dots \mu_{2n}}_{\nu_1 \dots \nu_{2n}}$ es el delta de Kronecker antisimetrizado. Para $n = 1$ se recupera el escalar de Ricci R de la relatividad general, y para $n = 2$ se obtiene el invariante de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Una propiedad fundamental es que el término de orden n contribuye de manera no trivial a las ecuaciones de movimiento solo en dimensiones $d > 2n$, de modo que en cuatro dimensiones únicamente el término de Einstein-Hilbert ($n = 1$) es dinámicamente relevante.

Para extender estos mecanismos de regularización a cuatro dimensiones, se emplea una *regularización dimensional* de la torre completa de Lovelock [123]. El procedimiento consiste en considerar el Lagrangiano de Lovelock de orden n en la dimensión crítica $d = 2n$, donde dicho término es topológico, y reescalarlo convenientemente antes de tomar el límite $d \rightarrow 2n$. Más precisamente, se sustrae de la acción de Lovelock de orden n una acción conformalmente relacionada y se toma el límite a la dimensión crítica $d = 2n$,

$$\mathcal{L}_n^{\text{reg}} = \lim_{d \rightarrow 2n} \frac{\mathcal{L}_n[g] - \mathcal{L}_n[\bar{g}]}{d - 2n}, \quad (5.2.3)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\phi} g_{\mu\nu}$ es una métrica conformalmente relacionada. Este procedimiento, análogo a la regularización dimensional empleada en teoría cuántica de campos, extrae la información dinámica del término topológico y genera una contribución no trivial a las ecuaciones de movimiento en cuatro dimensiones. El resultado es una teoría escalar-tensorial con ecuaciones de campo de segundo orden, donde el campo escalar ϕ surge naturalmente del procedimiento de regularización y se acopla a la gravedad en la forma de Horndeski, con potenciales fijos determinados por la estructura de la torre de Lovelock.

5.2.4 La acción del artículo en el marco de Horndeski

La aplicación de la regularización dimensional a la torre completa de invariantes de Lovelock de orden $n \geq 2$ da lugar a la acción cuatrodimensional [123]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + \frac{1}{l^2} \sum_{n=2}^{\infty} c_n l^{2n} \mathcal{L}_H^{(n)} \right], \quad (5.2.4)$$

donde l es una nueva escala de longitud que gobierna la huella escalar-tensorial dejada por los invariantes de Lovelock originales, c_n son constantes de acoplamiento y $\mathcal{L}_H^{(n)}$ es el Lagrangiano de Horndeski de orden n , con potenciales fijos dados por

$$\begin{aligned} G_2^{(n)} &= 2^{n+1}(n-1)(2n-3)X^n, \\ G_3^{(n)} &= -2^n n(2n-3)X^{n-1}, \\ G_4^{(n)} &= 2^{n-1}nX^{n-1}, \\ G_5^{(n)} &= \begin{cases} 4 \log X, & n = 2 \\ \frac{2^{n-1}n(n-1)}{n-2}X^{n-2}, & n > 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

donde $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$ es el término cinético canónico del campo escalar. Esta acción pertenece al marco de Horndeski estudiado en el Capítulo 3, con la particularidad de que los potenciales no son funciones arbitrarias sino que quedan completamente fijados por la estructura de la torre de Lovelock. El campo escalar ϕ surge naturalmente del procedimiento de regularización y no requiere ningún ajuste fino para producir soluciones regulares: la regularidad de la geometría es una consecuencia directa de la estructura de la teoría.

Para el caso de horizontes planos y tomando $c_n = 1$ para todo n , la suma infinita puede realizarse explícitamente y la ecuación de Wheeler que determina la función métrica $f(r)$ toma la forma compacta

$$\frac{2r^3}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{l^2 f(r)}{r^2} \right)^k = \frac{2\Lambda r^3}{3} + M, \quad (5.2.6)$$

donde M es una constante de integración identificada con la masa del agujero negro. Esta solución es regular en todo el espaciotiempo: en el límite $r \rightarrow 0$ la suma infinita genera efectivamente un núcleo de de Sitter, en acuerdo con el criterio de Sakharov discutido en la subsección anterior. Es precisamente la termodinámica de esta solución la que se analiza en el artículo adjunto.

Thermodynamics of four-dimensional regular black holes with an infinite tower of regularized curvature corrections

Adolfo Cisterna,^{1,2,*} Mokhtar Hassaine^{3,†} and Ulises Hernandez-Vera^{3,‡}

¹*Sede Esmeralda, Universidad de Tarapacá, Avenida Luis Emilio Recabarren 2477, Iquique, Chile*

²*Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, V Holešovickách 2, 180 00 Prague 8, Czech Republic*

³*Instituto de Matemática, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*



(Received 4 June 2025; accepted 10 August 2025; published 15 September 2025)

We study the thermodynamics of a class of four-dimensional black hole solutions arising from the compactification of a higher-curvature gravity theory featuring an infinite tower of Lovelock-type invariants. For planar horizons, we identify two distinct branches: a regular black hole supported by a nontrivial scalar field and a non-regular general relativity (GR) solution with a trivial scalar profile. Despite their differing geometries, both branches share the same free energy at fixed temperature, revealing a thermodynamic degeneracy naturally linked to the enhanced symmetry and scale invariance of the planar base manifold. In the case of a spherical horizon, even if the scalarized branch is not obtained in closed form, one can see that the degeneracy persists in the absence of the quadratic curvature contribution. On the other hand, if this quadratic term is taken into account, the regular solution may be thermodynamically favored (or not) over the Schwarzschild-anti-de Sitter solution depending on the values of the coupling constants of the theory.

DOI: [10.1103/6f3b-8794](https://doi.org/10.1103/6f3b-8794)

I. INTRODUCTION

Singularity theorems in general relativity (GR) demonstrate that, under fairly general physical conditions—such as the validity of energy conditions and the existence of trapped surfaces—gravitational collapse leads inevitably to the formation of spacetime singularities [1–3]. These singularities are characterized by the divergence of curvature invariants and geodesic incompleteness. They represent regions where the predictive power of GR breaks down, and thus signal a fundamental limitation of the classical theory in the strong gravity regime.

The appearance of curvature singularities is widely interpreted as an indication that GR is incomplete at high energy scales. In the vicinity of such singularities, quantum gravitational effects are expected to become significant, pointing to the need for a more fundamental theoretical framework. Although a complete theory of quantum gravity remains elusive, considerable attention has been devoted to constructing modified gravitational models that admit nonsingular black hole solutions—geometries that remain regular everywhere, including at the center of collapse. These are commonly referred to as regular black

holes. For a comprehensive overview, we refer the reader to the review [4] and the references cited therein.

These solutions, by construction, avoid inner curvature singularities while preserving essential features of black hole spacetimes, such as event horizons. Unfortunately, in most of the cases, they require the inclusion of exotic matter fields and undesired tunings between the theory and solution parameters.

It has long been understood that in spherically symmetric cases, any regular black hole geometry must feature a de Sitter-like core near the origin $r = 0$, where the curvature invariants remain finite and geodesic completeness is ensured. This necessary and sufficient condition is known as the Sakharov criterion [5,6]. The aforementioned inner de Sitter region effectively replaces the singular core of standard black hole solutions, such as those found in the Schwarzschild or Reissner-Nordström metrics. The first regular solution derived from equations stemming from an action principle was constructed some time ago in the context of nonlinear electrodynamics [7].¹ Within scalar-tensor theories, regular solutions have also been found for certain classes of Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories by means of the Kerr-Schild construction [9,10]. In addition, in the case of hairy solutions

*Contact author: adolfo.cisterna@mff.cuni.cz

†Contact author: mokhtar.hassaine@gmail.com

‡Contact author: uhernandez.vera@gmail.com

¹Some of these iconic regular black hole geometries have been proven to provide a natural mechanism for cosmic acceleration as well [8].

belonging to the beyond-Horndeski class, regular spacetimes have been obtained under a specific relation between the mass and the hair parameter [11,12].

More recently, a promising approach to constructing such regular black holes has emerged through the use of higher-curvature theories of gravity, particularly the class known as quasitopological gravities [13–17]. These theories generalize Einstein gravity by including specific combinations of curvature invariants that contribute non-trivially to the field equations in dimensions higher than four, while still yielding second-order equations of motion under the assumptions of spherical symmetry. In addition, in contrast to Lovelock theory [18,19], they are shown to exist at any order in the curvature in dimensions greater than four [20–22], and even more to provide a basis of polynomial densities for any aimed effective-field-theory expansion of GR [23].

By employing the full tower of quasitopological gravity terms at arbitrary order $n \geq 3$ in the curvature tensor—along with the $n = 2$ Gauss-Bonnet term—it becomes possible to construct black hole solutions that are regular at all points in the spacetime (of at least dimension five), in vacuum and with only mild assumptions on the theory couplings [24]. Taking the limit $n \rightarrow \infty$ naturally leads to the emergence of a de Sitter core, while the infinite series of higher-curvature terms also enables the construction of various regular geometries, depending on the chosen parametrization of the couplings that govern each term in the series. These solutions generically contain an inner (Cauchy) horizon, which is typically subjected to mass inflation and other instabilities [25]. However, such instabilities may be avoided if the inner horizon structure is extremal [26]. In addition, their dynamical formation has been recently addressed under fairly general conditions [27,28].

Due to the intrinsically higher-dimensional nature of quasitopological gravities, the resulting regular black holes inherently reside in higher dimensions. The presence of the full quasitopological tower relies on the structure of gravity theories that are well defined only in dimensions greater than four. Consequently, any solution constructed in this setting must be interpreted as higher-dimensional, which poses a conceptual challenge: how can such regularization mechanisms, which depend fundamentally on higher-dimensional structures, be applied in a four-dimensional context?

This question has been addressed in recent work by supplementing Einstein’s theory with four-dimensional Lovelock-like corrections at all orders in the curvature [29]. These corrections are achieved via a well-defined dimensional regularization of the entire Lovelock tower of higher curvature invariants, that considers the subtraction of two conformally related Lovelock actions of order n and performs the limit to the critical dimension $d = 2n$. This is made in strict analogy with the recently explored conformal regularizations of Einstein-Gauss-Bonnet gravity in dimension four [30–33]. Effectively, the higher-dimensional information is encoded through a scalar degree of freedom.

This scalar field arises naturally from the conformal regularization scheme and couples to gravity in a way that retains second-order field equations, thereby avoiding issues related to higher-derivative instabilities or ghosts [34,35]. In fact, it reproduces Horndeski gravity [36], in a covariant Galileons fashion [37], with fixed theory potentials.²

Importantly, for a planar base manifold geometry,³ the resulting black hole solutions in this reduced theory remain everywhere regular, mirroring the higher-dimensional configurations of quasitopological gravity. Again, considering the entire set of corrections allows one to effectively create a de Sitter core. Furthermore, the scalar field introduced in the process does not require any form of self-tuning or fine-tuning to maintain regularity. Instead, the regular geometry emerges as a consequence of the structure of the theory itself.

This work is devoted to the study of the thermodynamic properties of the regular planar anti-de Sitter (AdS) black holes constructed in [29].⁴ Using the Euclidean action approach [41], we compute the mass, entropy, and temperature, and verify that these quantities satisfy the first law of thermodynamics. Interestingly, we find that these thermodynamic charges are degenerate: the vacuum planar AdS black hole in pure GR possesses the same mass, entropy, and temperature, rendering it thermodynamically indistinguishable from the regular black hole. This degeneracy is attributed to the planar geometry of the horizon and has been observed previously [42] in a three-dimensional nonrotating setup.⁵ Taking advantage of the planar symmetry, we follow the methodology of [44] to construct the corresponding planar AdS soliton. We compute its mass and free energy, enabling an analysis of the phase transition structure between the soliton and the regular black hole configurations. Finally, although the exact form of the spherical counterpart of the regular (hairy) black hole is not known, we compute its mass, entropy, and temperature. In contrast to the planar case, we find that the thermodynamic degeneracy with the Schwarzschild-AdS black hole is lifted. We conclude with a qualitative analysis of the corresponding phase transition structure in this setup.

II. BLACK HOLE THERMODYNAMICS

A. Thermodynamics of the regular planar black holes

As discussed in [29], the conformal dimensional regularization of Lovelock theory gives rise to a scalar-tensor theory with second-order field equations. It is therefore

²This theory was obtained for the first time in [38].

³Although the spherical base manifold counterpart of this solution remains elusive in exact form, below we provide evidence supporting the loss of regularity in this case.

⁴Thermodynamic analysis of the aforementioned vacuum higher dimensional solutions [24] have been recently addressed in [39,40].

⁵In fact, universality of the thermodynamic quantities is no longer valid if rotation is included [43].

natural to recast this target theory within the Horndeski gravity framework [36,37]. In fact, to order n in the Lovelock Lagrangian $\mathcal{L}^n$, the resulting scalar-tensor theory is described by the Horndeski Lagrangian $\mathcal{L}_H^{(n)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H^{(n)} = & G_2^{(n)} - G_3^{(n)} \square \phi + G_4^{(n)} R \\ & + G_{4X}^{(n)} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2] + G_5^{(n)} G^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \\ & - \frac{G_{5X}^{(n)}}{6} [(\square \phi)^3 - 3 \square \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3], \end{aligned} \quad (1)$$

with fixed theory potentials given by

$$\begin{aligned} G_2^{(n)} &= 2^{n+1} (n-1)(2n-3) X^n, \\ G_3^{(n)} &= -2^n n(2n-3) X^{n-1}, \\ G_4^{(n)} &= 2^{n-1} n X^{n-1}, \\ G_5^{(n)} &= - \begin{cases} 4 \log X, & n=2, \\ 2^{n-1} \frac{n(n-1)}{n-2} X^{n-2}, & n>2, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

where $X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$ denotes the standard canonical kinetic term of the scalar degree of freedom [38].

Therefore, our guiding action principle is defined by the four-dimensional action

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + \frac{1}{l^2} \sum_{n=2}^{\infty} l^{2n} \mathcal{L}_H^{(n)} \right], \quad (3)$$

where l denotes a new length scale that governs the scalar-tensor trace left by the original Lovelock invariants. We have also already defined a set of couplings, that later on we denote by c_n , that already provide the planar regular black hole of [29].

We proceed with the study of the thermodynamics of the solutions using the Euclidean approach, where the thermodynamic ensemble corresponds to the Euclidean path integral in the saddle-point approximation around the classical Euclidean configuration [41]. Given the static and spherically symmetric nature of the geometries, we consider the Euclidean class of metrics

$$ds^2 = N(r)^2 f(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx_1^2 + dx_2^2), \quad (4)$$

$$\phi = \phi(r), \quad (5)$$

with Euclidean time $0 < \tau < \beta$, where $\beta = T^{-1}$ is, as usual, the inverse of the temperature. Here the scalar field is assumed to depend only on the radial coordinate r . Plugging this ansatz into the Euclidean action, one yields after some cumbersome calculations

$$I_E = -|\Omega_2| \beta \int N \mathcal{H}(f, f', \phi', \phi'')$$

and where the expression of $\mathcal{H}(f, f', \phi', \phi'')$ becomes too cumbersome to present in full. Varying this action with respect to N , f , and ϕ , one would yield to the three independent field equations. Nevertheless, because of the choice of the Horndeski potentials a certain combination of these field equations can be factorized as in [45,46] in the following form

$$\begin{aligned} & [(\phi')^2 + \phi''] \\ & \times \left\{ \sum_{n \geq 2} l^{2n} [-r^{2n+1} n(n-1)(2n-3) X^{n-1} - 2^n n(n-1) X^{n-2} \right. \\ & \left. + f X^{n-2} n(n-1)(1+2(n-2)+2r\phi'(2n-3))] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

It is clear that, as in similar cases [45,46], there exist two branches of solutions for the scalar field: a logarithmic branch, and another that cancels the infinite series. In what follows, we restrict our attention to the logarithmic branch and, from this point onward, we assume the scalar field takes the form $\phi(r) = \ln(r) + C$. We are aware that the general solution should be of the form $\phi(r) = \ln(Ar + B)$ but, as in [45,46], the integration constant B must be taken to zero. One can see that this branch of solution is compatible with $N(r) = 1$ and the metric function f determined below.

Now, since the scalar field can be chosen as $\phi = \ln(r)$, after some straightforward computations, the Euclidean action becomes

$$I_E = -|\Omega_2| \beta \int N \frac{d}{dr} \left[2r^3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l^{2k}} \left(\frac{-l^2 f}{r^2} \right)^k - \frac{\Lambda}{3} \right) \right] dr + B_E, \quad (7)$$

where $|\Omega_2| = \int dx_1 dx_2$ and B_E is a boundary (see below). It is clear that variation with respect to the lapse function N yields the following polynomial equation for f

$$\frac{2r^3}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-l^2 f(r)}{r^2} \right)^k = \frac{2\Lambda r^3}{3} + M, \quad (8)$$

where M is an integration constant. This solution corresponds to the regular black hole configuration recently constructed in [29].

In the Euclidean action, the boundary term B_E is determined by requiring that the Euclidean action attains an extremum, i.e., $\delta I_E = 0$, within the class of fields considered here, as is customary and was originally introduced in [47], see also [48]. As usual, the variation of the boundary term proceeds as $\delta B_E = \delta B_E(\infty) - \delta B_E(r_h)$. We first compute the variation at infinity, obtaining

$$\begin{aligned}\delta B_E(\infty) &= |\Omega_2| \beta \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta f}{l^2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(-l^2)^k f^{k-1}}{r^{2k-3}} - 2rl^2 \right], \\ &= |\Omega_2| \beta \delta M.\end{aligned}\quad (9)$$

Hence, we get

$$B_E(\infty) = |\Omega_2| \beta M = \beta |\Omega_2| \left(-\frac{2r_h^3 \Lambda}{3} \right), \quad (10)$$

where we used relation (8). As usual, at the horizon $\delta f_{r_h} = -4\pi T \delta r_h$, and thus

$$\begin{aligned}\delta B_E(r_h) &= |\Omega_2| \beta \frac{\delta f_{r_h}}{l^2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(-l^2)^k f^{k-1}}{r^{2k-3}} - 2rl^2 \right]_{r_h}, \\ &= 8\pi |\Omega_2| r_h \delta r_h.\end{aligned}\quad (11)$$

Integrating yields

$$B_E(r_h) = 4\pi |\Omega_2| r_h^2, \quad (12)$$

allowing us to express the final form of the boundary term as

$$B_E = \beta |\Omega_2| \left(-\frac{2r_h^3 \Lambda}{3} \right) - 4\pi r_h^2 |\Omega_2|. \quad (13)$$

It is then straightforward to extract the mass $\mathcal{M}$ and entropy $\mathcal{S}$

$$\mathcal{M} = -\frac{2r_h^3 \Lambda}{3} |\Omega_2|, \quad \mathcal{S} = 4\pi r_h^2 |\Omega_2|. \quad (14)$$

The temperature can be obtained by differentiating relation (8) and evaluating at $r = r_h$

$$T = -\frac{r_h \Lambda}{4\pi}. \quad (15)$$

Finally, one can directly verify the first law of black hole thermodynamics

$$d\mathcal{M} = T d\mathcal{S}. \quad (16)$$

Note that, for the same underlying theory, there also exists a solution corresponding to that of GR with a constant (trivial) scalar field. However, this GR branch is singular in the planar case, singular in the sense it contains a central singularity. Despite differences in the geometries and scalar field profiles between the nonregular GR solution and the regular scalarized configuration, it is straightforward to show that both possess the same free energy at fixed temperature. This thermodynamic equivalence indicates a degeneracy between the two branches, suggesting that the scalar field in the planar case can be activated without affecting the

on-shell action—effectively regularizing the geometry without altering its thermodynamic properties.

Now, it is possible to reintroduce the coupling constants c_n in front of each of the Horndeski Lagrangians $\mathcal{L}_H^{(n)}$ (3). The action principle we consider is then given by [29]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + \frac{1}{l^2} \sum_{n=2}^{\infty} c_n l^{2n} \mathcal{L}_H^{(n)} \right], \quad (17)$$

and, in this case, the Wheeler relation (8) becomes slightly modified as

$$\frac{2r^3}{l^2} \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left(\frac{-l^2 f(r)}{r^2} \right)^k - 2f(r)r = \frac{2\Lambda r^3}{3} + M. \quad (18)$$

Since the contribution of the variation at infinity depends only on the constant of integration M , and at the horizon only on the Einstein-Hilbert term $-2f(r)r$, it is evident that the resulting thermodynamic quantities are insensitive to the specific values of the coupling constants c_n . Consequently, for different choices of these couplings (provided they at least ensure the convergence of the series), the thermodynamics remains unchanged. This highlights once again the remarkable nature of these regular solutions: their thermodynamic behavior is universal, unaffected by the detailed structure of the higher-order terms in the action. This robustness suggests that the physical properties of these configurations are governed primarily by the leading-order dynamics, reinforcing their special role within the broader solution space of the theory.

B. Regular soliton: The phase diagram of regular black holes

In pure GR, the Schwarzschild-AdS black hole with a spherical horizon exhibits a rich phase transition structure relative to the maximally symmetric AdS background. As shown by Hawking and Page [49], there exists a critical temperature T_c at which the large-radius Schwarzschild-AdS black hole becomes thermodynamically favored over thermal AdS. This marks a first-order phase transition which, from the perspective of the dual conformal field theory (CFT), corresponds to a confinement/deconfinement transition [50].

It is well recognized that the phase transition structure—on both the gravitational and field theory sides—depends on the topology of the spacetime. In fact, no Hawking-Page transition occurs for planar Schwarzschild-AdS black holes with respect to thermal AdS, as the planar black hole is always thermodynamically dominant for any nonzero temperature.

However, even a minimal change in the topology on which the field theory resides—such as compactifying one of the planar directions into a circle—introduces a negative Casimir energy associated with the resulting nontrivial

topology. The corresponding geometry on the gravity side is known as the Horowitz-Myers AdS soliton [44]. As a matter of fact, a Hawking-Page transition does exist in between the planar Schwarzschild-AdS black hole and the AdS soliton [51].

Owing to the planar topology of the black hole geometry, this soliton can be obtained simply by performing a double Wick rotation: one between the Lorentzian time coordinate $t = ix_1$ and, let us say, the coordinate $x_1 = it$, where we assume that x_1 is compactified as $0 < x_1 < L_1$. Without any loss of generality, we can assume that the remaining planar direction satisfies $0 \leq x_2 < L_2$. Hence, the soliton metric in our case reads

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + f(r) dx_1^2 + r^2 dx_2^2, \quad (19)$$

where $f(r)$ corresponds to the regular black hole solution (8). Now, for this class of regular planar black holes, the Euclidean action $I_{E,s}$, defined with a Euclidean time $\tau = it$ such that $0 \leq \tau < \beta_s$, reads

$$I_{E,s} = -\beta_s \frac{8|\Omega_2|}{3\Lambda^2} = -\beta_s \frac{8L_1 L_2}{3\Lambda^2}, \quad (20)$$

from where it is direct to obtain the mass of the soliton

$$\mathcal{M}_s = -\frac{8|\Omega_2|}{3\Lambda^2} = -\frac{8L_1 L_2}{3\Lambda^2}. \quad (21)$$

On the other hand, the entropy of the soliton can be computed via the Cardy-like formula introduced in [52], using the very same soliton mass. It yields

$$\mathcal{S} = 3\pi(-2\mathcal{M}_s)^{\frac{1}{3}}\mathcal{M}_s^{\frac{2}{3}}, \quad (22)$$

result in agreement with the one obtained via the standard thermodynamical relation $\mathcal{S}_s = I_{E,s} - \beta_s \frac{\partial I_{E,s}}{\partial \beta_s}$.

Now, having the soliton geometry as the real vacuum state, which has a negative energy, allows the study of phase transition with respect to the planar black hole geometry. In fact, the difference of free energy between both hairy configurations is

$$\Delta F = \beta^{-1}[I_E - I_{E,s}] = |\Omega_2| \frac{8}{3\Lambda^2} \left[1 - \frac{8\pi^3}{\beta^3} \right]. \quad (23)$$

Recall that the soliton has no associated temperature, hence in order to compare the corresponding free energy we consider the equilibrium condition $\beta_s = \beta$. It is direct to observe the emergence of a critical temperature

$$T_c = \frac{1}{2\pi}, \quad (24)$$

at which a first-order phase transition occurs. In addition, once again, it can be proven that the thermodynamic structure is degenerated with respect to the one of the vacuum GR case.

C. Spherical case and non regular solution

An analogous calculation to the one performed above reveals that the function f of a line element with a spherical base manifold does not satisfy a Wheeler-like polynomial relation, such as the one given in Eq. (8). Although a closed-form expression for the metric function remains elusive, it is still possible to compute the associated thermodynamic quantities. These quantities can be derived and analyzed despite the lack of an explicit metric solution, they read

$$\mathcal{M} = -\frac{8\pi r_h^3 \Lambda}{3} + 8\pi r_h, \quad T = \frac{r_h(1 - r_h^2 \Lambda)}{4\pi(r_h^2 + 2)},$$

$$\mathcal{S} = 16\pi^2 r_h^2 + 64\pi^2 \ln(r_h). \quad (25)$$

Again, it is straightforward to verify the validity of the first law in this case. By introducing coupling functions in front of the Horndeski Lagrangians (17), one finds that only the coupling c_2 appears in the thermodynamic relations. Indeed, we obtain

$$\mathcal{M} = -\frac{8\pi r_h^3 \Lambda}{3} + 8\pi r_h, \quad T = \frac{r_h(1 - r_h^2 \Lambda)}{4\pi(r_h^2 + 2c_2)},$$

$$\mathcal{S} = 16\pi^2 r_h^2 + 64c_2 \pi^2 \ln(r_h). \quad (26)$$

This result is not surprising, as we had already observed that the presence of the Gauss-Bonnet coupling leads to a logarithmic contribution to the entropy, see, e.g., [53].

In the spherical case, the thermodynamic picture changes significantly compared to the planar scenario. Although the explicit form of the scalarized (hairy) black hole solution is not known, one can still compute its mass, entropy, and temperature, and thereby evaluate its free energy. When comparing with the Schwarzschild-AdS solution of general relativity—which corresponds to a trivial (constant) scalar field—an interesting dependence on the coupling c_2 emerges.

Specifically, when $c_2 \neq 0$, the difference in free energy can be either strictly positive or strictly negative, depending on the value of c_2 and the cosmological constant Λ . In such cases, either the scalarized (hairy) black hole or the GR branch can be thermodynamically favored at fixed temperature. This behavior points to the presence of a richer phase structure, controlled by the interplay between scalar couplings and background curvature.

On the other hand, when $c_2 = 0$, the situation changes. Although the free energy difference vanishes and the thermodynamic becomes degenerated with respect to the pure GR spherical case, the scalarized solution is still no longer regular near the origin. In particular, it lacks a de

Sitter core and does not behave as $f \sim 1$ near $r = 0$, indicating a pathological or singular geometry in that limit.

III. CONCLUSIONS

Using the Euclidean formalism, we analyzed the thermodynamics of a regular black hole solution in four-dimensional gravity, derived from an infinite tower of Horndeski theory with a planar base manifold. Our results reveal a marked contrast between black hole solutions with planar and spherical horizons within the same scalar-tensor framework. In the planar case, we identified two branches: a regular black hole supported by a nontrivial scalar field and a singular, GR-like solution with a trivial scalar configuration. Both share the same free energy, indicating thermodynamic degeneracy. This stems from the enhanced symmetry and scale invariance of planar horizons, which permit nontrivial scalar fields to regularize the geometry without affecting the on-shell action. Such behavior is reminiscent of flat-horizon holographic models, where scalar hair can be thermodynamically neutral.

In contrast, this degeneracy is lifted in the spherical case. Although the explicit metric for the scalarized black hole is unavailable, we computed its mass, entropy, and temperature, allowing evaluation of its free energy. The resulting difference from the GR branch suggests that the scalar field induces a new thermodynamic phase—similar to spontaneous scalarization in scalar-Gauss-Bonnet and other extended gravity theories, where curvature activates scalar fields and shifts the preferred thermodynamic solution [54]. These findings highlight the influence of horizon topology and base curvature on solution structure, thermodynamics, and possible phase transitions.

Further research is needed to assess the regularity and stability of scalarized black holes in the spherical case. A

detailed analysis, potentially involving numerical methods, may clarify whether the solution is truly singular or regularized at higher orders. Investigating the dynamical and thermodynamic stability of these solutions, along with their phase structure, could offer deeper insight into the role of scalar fields in black hole physics and their observational implications.

Future work should also test the conjecture that regular black holes with nontrivial scalar fields can exhibit the same free energy as singular GR solutions with constant scalar configurations. Verifying this will likely require numerical exploration of scalarized solutions and their thermodynamic behavior, especially when analytic metrics are inaccessible. It is crucial to determine whether thermodynamic observables alone—such as free energy or entropy—can signal the regularity of a solution. If so, this could serve as a powerful diagnostic tool in modified gravity, enabling the identification of physically viable, regular solutions even in the absence of explicit spacetime metrics.

ACKNOWLEDGMENTS

A. C. is partially supported by FONDECYT Grant No. 1250318 and by the GAČR 23-07457S grant from the Czech Science Foundation. M. H. gratefully acknowledges the University of Paris-Saclay for its warm hospitality during the development of this project. U. H.-V. is partially supported by ANID Grant No. 21231297 and would like to thank the University of Talca for funding a research internship at Charles University in Prague, to which he also expresses his sincere gratitude.

DATA AVAILABILITY

No data were created or analyzed in this study.

-
- [1] R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965).
 - [2] S. Hawking, The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities, *Proc. R. Soc. A* **300**, 187 (1967).
 - [3] S. W. Hawking and R. Penrose, The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. R. Soc. A* **314**, 529 (1970).
 - [4] C. Lan, H. Yang, Y. Guo, and Y.-G. Miao, Regular black holes: A short topic review, *Int. J. Theor. Phys.* **62**, 202 (2023).
 - [5] A. D. Sakharov, Nachal'naia stadija rasshirenija Vselennoj i vozniknovenije neodnorodnosti raspredelenija veshchestva, *Sov. Phys. JETP* **22**, 241 (1966).
 - [6] S. Chinaglia, The singularity problem in gravitational theory. The spherically symmetric case, Ph.D. thesis, Trento University, 2018.
 - [7] E. Ayon-Beato and A. Garcia, Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5056 (1998).
 - [8] K. Dialektopoulos, T. Papanikolaou, and V. Zarikas, Primordial black holes as cosmic expansion accelerators, [arXiv:2502.18352](https://arxiv.org/abs/2502.18352).
 - [9] E. Babichev, C. Charmousis, A. Cisterna, and M. Hassaine, Regular black holes via the Kerr-Schild construction in DHOST theories, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2020) 049.
 - [10] O. Baake, C. Charmousis, M. Hassaine, and M. San Juan, Regular black holes and gravitational particle-like solutions in generic DHOST theories, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2021) 021.
 - [11] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoeur, and T. Nakas, Black holes with primary scalar hair, *Phys. Rev. D* **109**, 024032 (2024).

- [12] O. Baake, A. Cisterna, M. Hassaine, and U. Hernandez-Vera, Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair: An exact solution framework for scalarizing in every dimension, *Phys. Rev. D* **109**, 064024 (2024).
- [13] J. Oliva and S. Ray, A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff's theorem and C-function, *Classical Quantum Gravity* **27**, 225002 (2010).
- [14] R. C. Myers and B. Robinson, Black holes in quasi-topological gravity, *J. High Energy Phys.* **08** (2010) 067.
- [15] M. H. Dehghani, A. Bazrafshan, R. B. Mann, M. R. Mehdizadeh, M. Ghanaatian, and M. H. Vahidinia, Black holes in quartic quasitopological gravity, *Phys. Rev. D* **85**, 104009 (2012).
- [16] J. Ahmed, R. A. Hennigar, R. B. Mann, and M. Mir, Quintessential quartic quasi-topological quartet, *J. High Energy Phys.* **05** (2017) 134.
- [17] A. Cisterna, L. Guajardo, M. Hassaine, and J. Oliva, Quintic quasi-topological gravity, *J. High Energy Phys.* **04** (2017) 066.
- [18] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **12**, 498 (1971).
- [19] D. Lovelock, Divergence-free tensorial concomitants, *Aequ. Math.* **4**, 127 (1970).
- [20] P. Bueno, P. A. Cano, and R. A. Hennigar, (Generalized) quasi-topological gravities at all orders, *Classical Quantum Gravity* **37**, 015002 (2020).
- [21] P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar, M. Lu, and J. Moreno, Generalized quasi-topological gravities: The whole shebang, *Classical Quantum Gravity* **40**, 015004 (2023).
- [22] J. Moreno and A. J. Murcia, Classification of generalized quasitopological gravities, *Phys. Rev. D* **108**, 044016 (2023).
- [23] P. Bueno, P. A. Cano, J. Moreno, and A. Murcia, All higher-curvature gravities as generalized quasi-topological gravities, *J. High Energy Phys.* **11** (2019) 062.
- [24] P. Bueno, P. A. Cano, and R. A. Hennigar, Regular black holes from pure gravity, *Phys. Lett. B* **861**, 139260 (2025).
- [25] E. Poisson and W. Israel, Inner-horizon instability and mass inflation in black holes, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1663 (1989).
- [26] F. Di Filippo, I. Kolář, and D. Kubiznak, Inner-extremal regular black holes from pure gravity, *Phys. Rev. D* **111**, L041505 (2025).
- [27] P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar, and Á. J. Murcia, Regular black holes from thin-shell collapse, *Phys. Rev. D* **111**, 104009 (2025).
- [28] P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar, and Á. J. Murcia, Dynamical formation of regular black holes, *Phys. Rev. Lett.* **134**, 181401 (2025).
- [29] P. G. S. Fernandes, Singularity resolution and inflation from an infinite tower of regularized curvature corrections, *arXiv:2504.07692*.
- [30] M. Gürses, T. c. Şişman, and B. Tekin, Is there a novel Einstein–Gauss–Bonnet theory in four dimensions?, *Eur. Phys. J. C* **80**, 647 (2020).
- [31] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, Derivation of regularized field equations for the Einstein–Gauss–Bonnet theory in four dimensions, *Phys. Rev. D* **102**, 024025 (2020).
- [32] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, R. B. Mann, and C. Pollack, On taking the $D \rightarrow 4$ limit of Gauss–Bonnet gravity: Theory and solutions, *J. High Energy Phys.* **07** (2020) 027.
- [33] H. Lu and Y. Pang, Horndeski gravity as $D \rightarrow 4$ limit of Gauss–Bonnet, *Phys. Lett. B* **809**, 135717 (2020).
- [34] M. Ostrogradski, Memoires sur les equations differentielle relatives au probleme des isoperimetres, *Mem. Ac. St. Petersburg* **VI**, 385 (1850).
- [35] R. P. Woodard, Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability, *Scholarpedia* **10**, 32243 (2015).
- [36] G. W. Horndeski, Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
- [37] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, Covariant Galileon, *Phys. Rev. D* **79**, 084003 (2009).
- [38] A. Colléaux, Dimensional aspects of Lovelock–Lanczos gravity, *arXiv:2010.14174*.
- [39] M. Aguayo, L. Gajardo, N. Grandi, J. Moreno, J. Oliva, and M. Reyes, Holographic explorations of regular black holes in pure gravity, *arXiv:2505.11736*.
- [40] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, S. Murk, and I. Soranidis, Thermodynamics of regular black holes in anti-de Sitter space, *arXiv:2505.11623*.
- [41] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Action integrals and partition functions in quantum gravity, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [42] R. A. Hennigar, D. Kubiznak, R. B. Mann, and C. Pollack, Lower-dimensional Gauss–Bonnet gravity and BTZ black holes, *Phys. Lett. B* **808**, 135657 (2020).
- [43] R. A. Hennigar, D. Kubiznak, and R. B. Mann, Rotating Gauss–Bonnet BTZ black holes, *Classical Quantum Gravity* **38**, 03LT01 (2021).
- [44] G. T. Horowitz and R. C. Myers, The AdS/CFT correspondence and a new positive energy conjecture for general relativity, *Phys. Rev. D* **59**, 026005 (1998).
- [45] P. G. S. Fernandes, Gravity with a generalized conformal scalar field: theory and solutions, *Phys. Rev. D* **103**, 104065 (2021).
- [46] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoer, Selecting Horndeski theories without apparent symmetries and their black hole solutions, *Phys. Rev. D* **108**, 024019 (2023).
- [47] T. Regge and C. Teitelboim, Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity, *Ann. Phys. (N.Y.)* **88**, 286 (1974).
- [48] A. Bakopoulos and T. Karakasis, Thermodynamic analysis of shift-symmetric black-hole spacetimes in Horndeski gravity, *arXiv:2502.07919*.
- [49] S. W. Hawking and D. N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-De Sitter space, *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983).
- [50] E. Witten, Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).
- [51] S. Surya, K. Schleich, and D. M. Witt, Phase transitions for flat AdS black holes, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5231 (2001).

- [52] M. Bravo Gaete, L. Guajardo, and M. Hassaine, A Cardy-like formula for rotating black holes with planar horizon, [J. High Energy Phys.](#) **04** (2017) 092.
- [53] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoer, Conformally coupled theories and their deformed compact objects: From black holes, radiating spacetimes to eternal wormholes, [Phys. Rev. D](#) **106**, 064039 (2022).
- [54] D. D. Doneva, F. M. Ramazanoğlu, H. O. Silva, T. P. Sotiriou, and S. S. Yazadjiev, Spontaneous scalarization, [Rev. Mod. Phys.](#) **96**, 015004 (2024).

Capítulo 6

Conductividad DC en agujeros negros con pelo escalar

El estudio de las propiedades de transporte en sistemas fuertemente acoplados constituye uno de los problemas más desafiantes de la física teórica moderna. En el régimen de acoplamiento fuerte los métodos perturbativos estándar dejan de ser aplicables, y la correspondencia AdS/CFT ha emergido como una herramienta privilegiada para abordar estos sistemas. Esta correspondencia permite traducir preguntas sobre conductividad y disipación de momento en problemas gravitacionales tratables, donde la conductividad DC puede calcularse directamente a partir de datos en el horizonte del agujero negro en el bulk,¹ sin necesidad de resolver las ecuaciones de perturbación en todo el espaciotiempo.

En este capítulo se estudia el impacto del pelo escalar primario sobre la conductividad DC en el marco de teorías beyond-Horndeski, cuyo formalismo fue desarrollado en el Capítulo 3. A diferencia del pelo secundario, cuyo valor queda completamente determinado por los parámetros termodinámicos de la solución, el pelo primario constituye un grado de libertad independiente que no puede ser removido por ninguna elección de condiciones de contorno [13, 14]. En estas soluciones, el campo escalar adopta el ansatz $\phi(t, r) = qt + \psi(r)$, con q el parámetro de pelo primario, de modo que tanto la métrica como el campo escalar dependen explícitamente de q . Una pregunta natural es si esta presencia explícita del pelo se refleja en las propiedades de transporte de la teoría dual. Para responderla, se generalizan las soluciones de agujeros negros con pelo primario mediante la inclusión de campos axiónicos, que introducen disipación de momento, y un campo de Maxwell, que permite definir una corriente eléctrica conservada.

¹En el contexto de la correspondencia AdS/CFT, el *bulk* hace referencia al interior del espacio anti-de Sitter, donde reside la teoría gravitacional. La teoría de campos dual vive en la frontera de este espacio, que tiene una dimensión menos.

El resultado central que se obtiene es que, a pesar de la dependencia explícita del campo escalar y la métrica en el parámetro de pelo, la conductividad DC no depende directamente de dicho parámetro. Su influencia es únicamente indirecta, a través de la modificación de la ubicación del horizonte. Este resultado se muestra tanto para un modelo específico de beyond-Horndeski como para una clase más general de teorías, subrayando su robustez.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la sección de preliminares se introducen los conceptos fundamentales necesarios para comprender el artículo: la conductividad eléctrica clásica, la correspondencia AdS/CFT y el formalismo de conductividad DC holográfica con disipación de momento. Las secciones siguientes presentan los resultados originales [26].

6.1 Preliminares

6.1.1 Conductividad eléctrica clásica

Los materiales pueden clasificarse según su capacidad para conducir cargas eléctricas en tres categorías: conductores, semiconductores y aislantes. Esta clasificación tiene su origen en la estructura de bandas de energía del material, como se ilustra en la Figura 6.1: en los conductores, la banda de conducción está parcialmente ocupada y los electrones pueden moverse libremente; en los aislantes, existe una brecha de energía grande entre la banda de valencia y la de conducción; y los semiconductores ocupan una posición intermedia, con una brecha pequeña que puede superarse mediante excitaciones térmicas o dopaje [124, 125].

La propiedad que cuantifica esta capacidad de transporte es la *conductividad eléctrica*. Para derivarla desde primeros principios, consideremos un conductor en presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}$. Bajo su acción, los portadores de carga adquieren una velocidad de deriva media $\vec{v}$ proporcional al campo,

$$\vec{v} = \mu \vec{E}, \quad (6.1.1)$$

donde μ es la movilidad de los portadores. Como se ilustra en la Figura 6.2, la densidad de corriente $\vec{J}$ se define como la carga que atraviesa una sección transversal A por unidad de tiempo,

$$\vec{J} = \frac{I}{A} = q \frac{dN}{dV} \vec{v}, \quad (6.1.2)$$

donde dN/dV es la densidad volumétrica de portadores de carga. Definiendo la conductividad

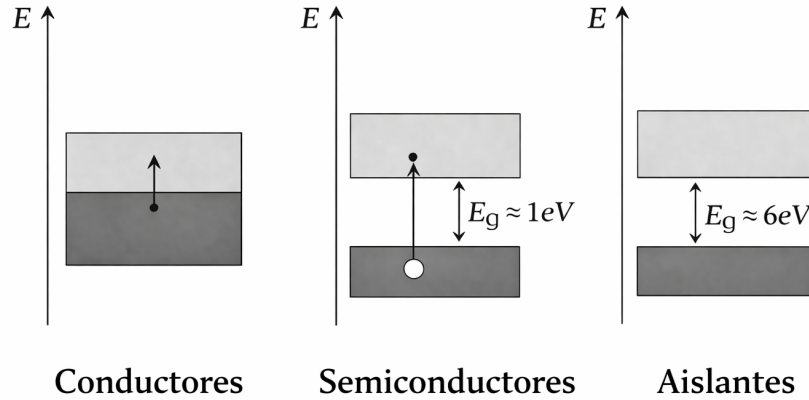


Figura 6.1: Estructura de bandas de energía para conductores, semiconductores y aislantes. La banda oscura representa la banda de valencia ocupada y la banda clara la banda de conducción. E_g denota la brecha de energía entre ambas bandas.

como $\sigma \equiv q(dN/dv)\mu$, se obtiene la *ley de Ohm*,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (6.1.3)$$

donde σ mide la capacidad del material para dejar pasar corriente eléctrica. En el límite de frecuencia cero, esta cantidad se denomina conductividad DC (*direct current*) y caracteriza la respuesta estática del sistema.

Un aspecto fundamental de la conductividad es su dependencia en los mecanismos de disipación de momento. En sistemas con invarianza traslacional perfecta, la conservación del momento impide que los portadores de carga disipen su momento, lo que conduce a una conductividad DC infinita [126]. En materiales reales, mecanismos como vibraciones de la red cristalina, impurezas o desorden rompen esta invarianza y dan lugar a una conductividad finita. Esta observación tiene consecuencias profundas en el contexto holográfico: para obtener una conductividad DC finita en modelos holográficos es necesario introducir explícitamente un mecanismo de ruptura de la invarianza traslacional en el bulk, como se discute en la subsección 6.1.4.

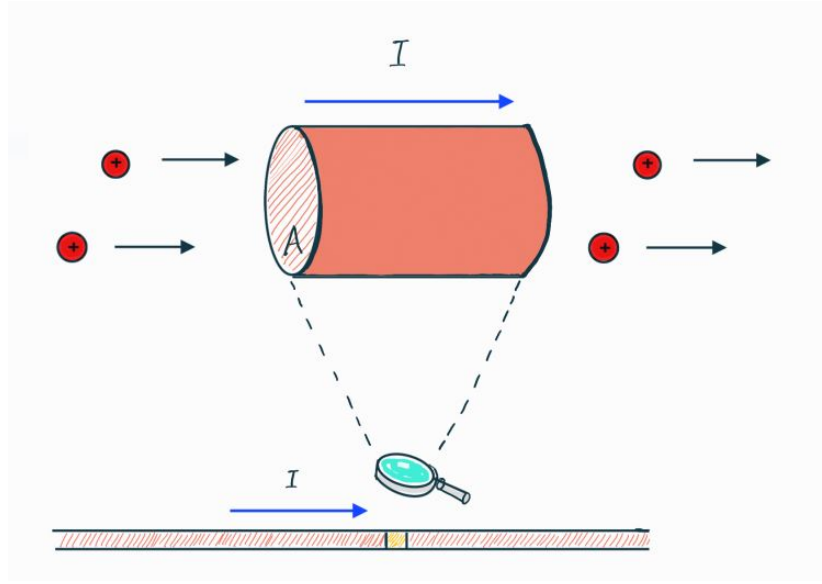


Figura 6.2: Portadores de carga moviéndose a través de un conductor de sección transversal A bajo la acción de un campo eléctrico externo, generando una corriente I .

6.1.2 Principio holográfico

El principio holográfico es una conjetura fundamental sobre la naturaleza de la gravedad cuántica, propuesta de manera independiente por 't Hooft [127] y Susskind [128] a comienzos de la década de 1990. Su motivación original proviene de un resultado aparentemente simple pero profundo: la entropía de un agujero negro, dada por la fórmula de Bekenstein–Hawking $S = A/4G$, escala con el área del horizonte y no con el volumen de la región que encierra. Esto contrasta radicalmente con los sistemas termodinámicos convencionales, donde la entropía es extensiva en el volumen, y sugiere que el número de grados de libertad independientes de una región del espacio no está determinado por su volumen sino por el área de su frontera.

El principio holográfico eleva esta observación a una afirmación general: toda la información física contenida en una región del espacio puede ser codificada de manera completa en una teoría definida en su frontera, con una densidad máxima de un bit de información por área de Planck [128]. En otras palabras, la descripción fundamental de la naturaleza sería esencialmente bidimensional, en analogía con un holograma óptico que codifica una imagen tridimensional en una superficie bidimensional [128].

Si bien el principio holográfico fue formulado inicialmente como una conjetura sobre gravedad cuántica en términos generales, su realización concreta más exitosa es precisamente la correspondencia AdS/CFT [23], que proporciona un ejemplo explícito y calculable de esta dualidad bulk/frontera. En este marco, la teoría gravitacional en el bulk anti-de Sitter jue-

ga el papel de la descripción volumétrica, mientras que la teoría conforme de campos en la frontera es su representación holográfica. La correspondencia AdS/CFT no solo confirma el principio holográfico en un contexto preciso, sino que lo convierte en una herramienta práctica para calcular observables físicos, como las propiedades de transporte que se estudian en este capítulo.

6.1.3 Correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT, formulada originalmente por Maldacena [23] y desarrollada posteriormente por Gubser, Klebanov y Polyakov [24] y por Witten [25], establece una equivalencia entre una teoría gravitacional en un espacio anti-de Sitter (AdS) de $d + 1$ dimensiones y una teoría conforme de campos (CFT) definida en su frontera d -dimensional. Esta dualidad es de naturaleza holográfica: los grados de libertad de la teoría gravitacional en el bulk codifican la información de la teoría de campos en la frontera, y viceversa.

El ejemplo prototípico es la dualidad entre la supergravedad de tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ y la teoría de Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$ supersimétrica en cuatro dimensiones [23].² Sin embargo, la correspondencia ha demostrado ser mucho más general, extendiéndose a una amplia variedad de teorías gravitacionales y sistemas de campos. En particular, su aplicación a la materia condensada —conocida como AdS/CMT— ha permitido modelar fenómenos de transporte en sistemas fuertemente acoplados como superconductores de alta T_c , metales extraños y fluidos cuánticos [129, 130].

La correspondencia establece un diccionario preciso entre los campos en el bulk y los operadores de la CFT dual. En particular, el tensor métrico $g_{\mu\nu}(r, x)$ es dual al tensor energía-momento $T_{\mu\nu}(x)$ de la teoría dual, y el campo de gauge $A_\mu(r, x)$ corresponde a una corriente conservada $J_\mu(x)$, que es precisamente el operador relevante para el cálculo de la conductividad. En el contexto específico de esta tesis, las entradas más relevantes del diccionario

²La supergravedad de tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ es una teoría gravitacional en diez dimensiones que surge como límite de baja energía de la teoría de cuerdas de tipo IIB, compactificada sobre una esfera de cinco dimensiones S^5 dejando un espacio anti-de Sitter de cinco dimensiones AdS_5 . La teoría de Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$ supersimétrica es una teoría de gauge en cuatro dimensiones con la máxima supersimetría posible, cuyo grupo de gauge es $SU(N)$ en el límite de N grande.

holográfico son las siguientes:

Teoría gravitatoria (bulk)	Teoría de campos (frontera)	(6.1.4)
Campo de gauge $A_\mu(r, x)$	Corriente conservada $J_\mu(x)$	
Campo escalar $\phi(t, r) = qt + \psi(r)$	Operador escalar con fuente temporal	
Campos axiónicos $\psi_i = \omega x_i$	Ruptura de invarianza traslacional	

donde la segunda entrada refleja el ansatz del campo escalar con pelo primario estudiado en el Capítulo 3, y la tercera entrada corresponde al mecanismo de disipación de momento introducido en la subsección siguiente.

El comportamiento asintótico de un campo en el bulk determina tanto la fuente externa como el valor de expectativa del operador dual en la frontera [24, 25]. Esta relación, conocida como la prescripción GKPW (por las iniciales de Gubser, Klebanov, Polyakov y Witten, quienes la formularon de manera independiente y simultánea en 1998), permite calcular funciones de correlación de la teoría de campos a partir de soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento en el bulk, haciendo la correspondencia operacionalmente útil incluso sin conocer los detalles microscópicos de la teoría dual.

Uno de los aspectos más poderosos de la correspondencia es su utilidad en el régimen de acoplamiento fuerte: mientras que los métodos perturbativos de la teoría de campos fallan, el lado gravitacional permanece tratable clásicamente. En particular, la inclusión de un agujero negro en el bulk introduce temperatura en el sistema: la temperatura de Hawking del agujero negro se identifica con la temperatura del estado térmico de la CFT dual [104]. En el contexto del transporte, esto significa que la conductividad DC de la teoría dual puede calcularse directamente a partir de perturbaciones del agujero negro en el bulk, como se desarrolla en la subsección siguiente.

6.1.4 Conductividad DC holográfica y disipación de momento

Como se discutió en la subsección anterior, en sistemas con invarianza traslacional perfecta la conservación del momento impide que los portadores de carga disipen su energía, lo que conduce a una conductividad DC infinita. En holografía, este comportamiento se refleja directamente en el bulk: cuando la teoría gravitacional preserva la invarianza traslacional, las perturbaciones del campo de gauge no se amortiguan y la corriente eléctrica fluye sin resistencia [126]. Para obtener una conductividad finita es necesario introducir explícitamente un mecanismo que rompa esta simetría en el bulk. Una manera elegante y ampliamente

utilizada consiste en introducir campos axiónicos ψ_i con perfil lineal en las coordenadas del horizonte [131, 132],

$$\psi_i = \omega x_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.1.5)$$

donde ω es el parámetro axiómico que controla la intensidad de la disipación de momento. Este ansatz rompe explícitamente la invarianza traslacional en el bulk, introduciendo una relajación de momento finita en la teoría dual y dando lugar a una conductividad DC finita.

El método para calcular la conductividad DC a partir de datos en el horizonte fue formalizado por Donos y Gauntlett [132, 133]. La idea central es que los coeficientes de transporte pueden extraerse directamente de la estructura near-horizon del espaciotiempo, sin necesidad de resolver las ecuaciones de perturbación en todo el bulk. Para ello, se consideran perturbaciones linealizadas de los campos de fondo aplicando un campo eléctrico de magnitud E a lo largo de una dirección espacial,

$$\delta A_{x_i} = -E_{x_i} t + a_{x_i}(r), \quad \delta g_{tx_i} = r^2 H_{tx_i}(r), \quad \delta \psi_i = \chi_i(r), \quad (6.1.6)$$

donde a_{x_i} , H_{tx_i} y χ_i son campos de fluctuación que dependen solo de la coordenada radial. A partir de las ecuaciones de Maxwell linealizadas se define una corriente conservada J_{x_i} a lo largo de la dirección holográfica, cuya conservación $\partial_r J_{x_i} = 0$ permite evaluarla en el horizonte. Para garantizar la regularidad de las perturbaciones se imponen condiciones de borde en coordenadas de Eddington-Finkelstein, que exigen que los campos sean entrantes en el horizonte [134], y se requiere que las perturbaciones métricas se anulen asintóticamente.

Usando estas condiciones de borde, la conductividad DC se obtiene como

$$\sigma_{x_i x_i}^{\text{DC}} = \frac{\partial J_{x_i}}{\partial E_{x_i}}, \quad (6.1.7)$$

evaluando la corriente en el horizonte $r = r_h$. El resultado general para una teoría con un campo de Maxwell minimal y campos axiónicos lineales toma la forma [132]

$$\sigma^{\text{DC}} = 1 + \frac{Q_e^2}{\omega^2 r_h^2}, \quad (6.1.8)$$

donde Q_e es la carga eléctrica y r_h el radio del horizonte. Este resultado ilustra una propiedad notable: la conductividad DC queda completamente determinada por datos en el horizonte, sin necesidad de conocer la solución completa en el bulk. La aplicación de este método en diferentes teorías gravitacionales da lugar a expresiones similares para la conductividad, que

dependen exclusivamente de cantidades evaluadas en el horizonte [135–137]. Es precisamente esta robustez la que hace posible estudiar el impacto de modificaciones de la teoría gravitacional —como la presencia de pelo escalar primario— sobre las propiedades de transporte, que es el objetivo del presente capítulo.

Lack of influence of the scalar hair on the DC conductivity

Ulises Hernandez-Vera*

Instituto de Matemáticas (INSTAT), Universidad de Talca, Casilla 747, Talca 3460000, Chile



(Received 14 February 2025; accepted 22 March 2025; published 14 April 2025)

Recently obtained black hole solutions within the framework of beyond-Horndeski theories, which have the advantage of featuring primary hair, are generalized in the presence of two axionic fields. In order to induce a momentum dissipation, the axionic field solutions are homogeneously distributed along the horizon coordinates of the planar base manifold. We show that, despite the explicit dependence of the scalar field and the metric on the primary hair, this latter does not directly affect the calculation of transport properties. Its influence is indirect, modifying the horizon location, but the transport properties themselves do not explicitly depend on the hair parameter. We take a step further and show that even within a more general class of beyond-Horndeski theories, where the scalar field depends linearly on the hair parameter, the scalar hair still has no direct impact on the DC conductivity. This result underscores the robustness of our earlier findings, and seem to confirm that the transport properties remain unaffected by the explicit presence of the hair parameter.

DOI: [10.1103/PhysRevD.111.084035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.111.084035)

I. INTRODUCTION

The study of black holes in alternative gravitational theories has gained significant importance, particularly in the exploration of solutions with “hair.” While black holes are traditionally characterized by their mass, charge, and angular momentum, the concept of black hole hair introduces additional features which potentially modify the physical properties. Despite considerable theoretical advancements, the physical interpretation of hairy black hole solutions remains somewhat ambiguous in certain cases, particularly concerning the underlying nature of the hair parameter. On the other hand, understanding how the hair parameter can lead to observable consequences in the context of astrophysical black holes is undoubtedly a significant challenge.

In this context, we propose that the study of DC conductivity in holographic systems could provide valuable insights into the physical significance of (primary) hair. By examining how momentum dissipation and transport properties emerge in black hole spacetimes with (primary) hair, we aim to better understand the connection between the spacetime structure and the boundary field theory. Before going into the specifics of DC conductivity calculations we plan to do, we first provide a brief overview of the

relationship between black holes and transport properties, particularly how these coefficients can be derived from the black hole horizon data. This will serve as a foundation for exploring the physical implications of primary hair of the axionic black hole solutions we will obtain.

In systems with perfect translational symmetry, the conservation of momentum prevents charge carriers from dissipating their momentum, leading to infinite DC conductivity. However, real-world materials exhibit finite conductivity because of mechanisms such as lattice vibrations or disorder, which break the translational invariance. These processes introduce momentum relaxation, resulting in a finite timescale over which momentum dissipates. In holography, momentum dissipation is modeled by breaking translational symmetry in the bulk spacetime, either explicitly through spatially dependent axion fields as we will do here, or periodically via Q-lattice scalar fields. Such models have proven invaluable for studying transport phenomena in strongly coupled systems. For instance, Q-lattice deformations or linear axions in holographic setups lead to finite DC conductivities in the dual field theory, mimicking the effects of resistivity in condensed matter systems; see [1–3]. A significant advance in this field is the realization that DC transport coefficients such as electrical and thermal conductivities can be computed directly from the black hole horizon data. This approach, formalized in Refs. [1,1,4], utilizes the near-horizon structure of the spacetime to express conductivities in terms of geometric and field quantities, bypassing the need to solve the full and complicated bulk equations. A convenient setup involves focusing on theories that admit axionic black hole solutions, which will be the approach

*Contact author: uhernandez.vera@gmail.com

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

we follow in this work. Examples of planar axionic black holes for scalar field nonminimally coupled together with two axionic field homogeneously distributed along the planar coordinates were shown to exist in [5–7]. On the other hand, axionic black hole solutions are significant as gravitational duals for strongly coupled quantum field theories, particularly in systems where momentum dissipation will occur by choosing the axionic field homogeneously distributed along the horizon coordinates of the planar base manifold. In the current literature, there are numerous examples of axionic black hole solutions for which transport properties have been analyzed through this framework, particularly in the context of theories involving a scalar field. Without being exhaustive, we can mention cases such as a scalar field nonminimally (and possibly conformally) coupled [8,9], for some Horndeski sectors [10,11], for k -essence axionic terms [12] or even in five dimensions with a Einstein-Gauss-Bonnet gravity theory [13].

To explore the influence that scalar hair could have from a holographic perspective, we propose as a first step to construct axionic black hole solutions that incorporate a scalar field explicitly dependent on the hair parameter. In these solutions, the hair parameter not only affects the scalar field but also appears explicitly in the metric itself, providing a direct connection between the geometry and the scalar dynamics, see Refs. [14] and [15,16] for such black hole solutions but without axionic fields. Note that in Ref. [15], the first example of black hole solution with primary hair in the beyond-Horndeski class that allows the inclusion of a Maxwell field was presented. Note that a secondary hair example was early on provided [17].

Axionic black holes with primary hair are particularly interesting because they can allow for a clear and testable framework to evaluate the role of scalar hair in holographic setups. These solutions arise naturally in certain scalar-tensor theories, particularly those known as beyond-Horndeski [18,19] or DHOST theories [20,21]. These extended models of gravity include additional terms in the Lagrangian, beyond the standard Horndeski framework [22], which provide richer dynamics and allow for coupling mechanisms that make the hair parameter more prominent. In fact, unlike Horndeski theory, which guarantees second-order equations of motion, beyond-Horndeski or DHOST theories allow for higher-order equations. However, these theories are carefully constructed so that the propagating degrees of freedom remain well defined, thanks to degeneracy conditions that eliminate ghost modes. For a review on black holes in scalar-tensor theories within the general framework of Horndeski theories, see [23,24]. By leveraging these extended theories, we aim to construct axionic black hole configurations where the presence of the scalar hair is encoded explicitly in the spacetime geometry as well as in the scalar field. Our ultimate goal is to use these solutions as a basis to analyze how the hair parameter might

or not influence physical observables, such as the DC conductivity in holographic models.

The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we will examine a model belonging to the beyond-Horndeski class, for which a black hole solution with primary hair was identified in [14], and latter generalized in [15,16]. We extend these solutions by charging them through the Maxwell term and by introducing two axionic fields, enabling momentum relaxation. For this specific axionic solution, where the hair appears explicitly in both the metric and the scalar field, we will calculate the DC conductivity using the methods outlined in [1,2]. We will demonstrate that the resulting expression for the DC conductivity does not explicitly depend on the hair parameter. The expectation of seeing the hair parameter appear in the expression for the DC conductivity was driven by the fact that the scalar field explicitly and linearly depended on the hair parameter as $\phi(t, r) = qt + \psi(r)$, where q is the hair parameter. Building on this, we will consider in Sec. III a more general beyond-Horndeski theory that remains shift-invariant. This ensures that the scalar field can once again depend on the hair parameter as previously. However, as general as the functions of the beyond-Horndeski theory may be, we will observe that the DC conductivity remains insensitive to the hair parameter. Even in this case, we will show that it is impossible for the hair parameter to explicitly appear in the transport coefficients. The final section will be dedicated to our conclusions and future prospects.

II. CHARGED AXIONIC BLACK HOLES WITH PRIMARY SCALAR HAIR

As previously mentioned, we will focus on a simple scalar-tensor theory model that belongs to the class of so-called beyond-Horndeski theories. This model, along with certain extensions, has the notable feature of admitting spherically symmetric black hole solutions with primary hair [14–16]. In these solutions, the hair explicitly manifests in both the spacetime metric and the scalar field configuration, distinguishing them from conventional black hole solutions in scalar-tensor theory.

To incorporate momentum dissipation into the model, we introduce two axionic fields that will explicitly break translational symmetry. Additionally, we include a Maxwell term to account for electromagnetic interactions. Consequently, the model we propose to study is described by the following four-dimensional action

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[G_2 + G_4 R + G_{4,X} ((\Box\phi)^2 - \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}) \right. \\
 & + F_4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma}{}_{\sigma} \phi_{\mu} \phi_{\alpha} \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left. \right] \\
 & + \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \psi_i \partial^{\mu} \psi_i \right)^k
 \end{aligned} \tag{1}$$

where for simplicity we have defined $\phi_\mu = \partial_\mu \phi$ and $\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$, and where the coupling functions G_2 , G_4 , and F_4 depend only on the kinetic term $X = -\frac{1}{2}\phi_\mu \phi^\mu$ as

$$G_2 = -\frac{8\eta}{3\lambda^2} X^2, \quad G_4 = 1 - \frac{4\eta}{3} X^2, \quad F_4 = \eta,$$

$$G_{4,X} := \frac{dG_4}{dX} = -\frac{8\eta}{3} X$$

and where ψ_i for $i = 1, 2$ stand for the two axionic fields. We allow for the possibility of considering axionic fields in a k-essence form by introducing an exponent k . This generalization broadens the scope of our study, enabling us to investigate models where the dynamics of the axionic fields are governed by nonlinear kinetic terms. Such k-essence frameworks provide additional flexibility in exploring the behavior of momentum dissipation mechanisms and their interaction with other components of the theory, such as the scalar field and the black hole hair. This inclusion also paves the way for examining richer phenomenology and potential observational signatures of these generalized models. For example, the case $k = 2$ will be particular since the axionic part of the action will enjoy conformal symmetry, and this is achieved by $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$ and $\psi_i \rightarrow \psi_i$ for $i = 1, 2$.

In the following, we shall look for an ansatz of the form

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx_1^2 + dx_2^2),$$

$$\phi(t, r) = qt + \psi(r), \quad A_\mu dx^\mu = Q(r)dt, \quad \psi_i(x) = \omega x_i, \quad (2)$$

that aligns with the objectives we have described before. As shown below, the parameter q will correspond to a primary hair. An ansatz of this kind for the scalar field was first considered in the context of stealth solutions for some specific sectors of Horndeski theory [25].

A solution within the ansatz (2) to the field equations associated to the action (1) is given by

$$f(r) = h(r) = -\frac{2M}{r} + \frac{2q^4\eta}{(r/\lambda)^2} + \frac{Q_e^2}{4r^2} - \frac{(\omega^2/2)^k}{(2k-3)r^{2(k-1)}},$$

$$[\psi'(r)]^2 = \frac{q^2}{h^2(r)} \left[1 - \frac{h(r)}{(r/\lambda)^2} \right], \quad Q(r) = -\frac{Q_e}{r}. \quad (3)$$

Various comments can be made concerning this axionic black hole solutions. First of all, in the absence of the electric charge and axion charge $Q_e = \omega = 0$, the solution (3) corresponds to the hairy solution found in [16] for a planar base manifold. Second, one could also consider the dyonic extension of the solution, although this is not necessary for our objective. Also, it can be observed that for a k-essence theory with $k = 2$, corresponding to a

conformally invariant axionic action, the term in the metric associated with the axionic charge decreases as $\sim \frac{1}{r^2}$, similar to the behavior of the Maxwell charge, which is also invariant in four dimensions. Finally, from the expression of the metric function $h(r)$, it appears that the case $k = \frac{3}{2}$ requires separate consideration. Specifically, one can see that for $k = \frac{3}{2}$, the metric solution exhibits a logarithmic dependence and is expressed as

$$f(r) = h(r) = -\frac{2M}{r} + \frac{2q^4\eta}{(r/\lambda)^2} + \frac{Q_e^2}{4r^2} + \frac{\sqrt{2}\omega^3 \ln(r)}{4r},$$

$$[\psi'(r)]^2 = \frac{q^2}{h^2(r)} \left[1 - \frac{h(r)}{(r/\lambda)^2} \right], \quad Q(r) = -\frac{Q_e}{r}. \quad (4)$$

A. Holography DC conductivity of the axionic solution

In this subsection, we will focus on calculating the DC conductivity, following step by step the method outlined in [1] and arrive at the conclusion that the DC conductivity explicitly depends on the location of the horizon but not on the hair, even though the hair is explicitly present in the expression for the scalar field. The approach of Ref. [1] links the electrical conductivity of a boundary theory to data at the black hole horizon in the bulk spacetime. In doing so, we first consider small linearized perturbations of the background fields including some of the components of the metric, the Maxwell potential, and the two axionic fields as

$$g_{tx_i} = r^2 \delta H_{tx_i}(r), \quad g_{rx_i} = r^2 \delta H_{rx_i}(r), \quad (5)$$

$$A_{x_i} = \delta(-E_{x_i}t + a_{x_i}(r)), \quad \psi_i = \omega x_i + \delta \frac{\chi_i(r)}{\omega}, \quad (6)$$

where a_{x_i} , H_{tx_i} , H_{rx_i} , and χ_i are independent fluctuation fields, and only depend on the radial coordinate. Second, we solve the linearized Maxwell equations, and this allows to define a conserved current J_{x_i} in each spatial direction $i = 1, 2$ as

$$\partial_r(-ha'_{x_i} - Q'r^2 H_{tx_i}) = 0 \Rightarrow$$

$$J_{x_i} := -ha'_{x_i} - Q'r^2 H_{tx_i} = -ha'_{x_i} + Q_e H_{tx_i}. \quad (7)$$

To ensure regular fluctuations, it is necessary to impose boundary conditions at the horizon and at infinity. It is convenient to use the Eddington-Finkelstein coordinates (v, r) with $v = t + \int \frac{dr}{h(r)}$. In his coordinate system, the gauge field is then defined as

$$A_{x_i} = \delta \left(a_{x_i} - E \left(v - \int \frac{dr}{h(r)} \right) \right) dx_i,$$

and the fluctuated metric becomes

$$ds^2 = -h dv^2 + 2dvdr + r^2 dx_1^2 + r^2 dx_2^2 + \delta H_{tx_i} dv dx_i - \frac{\delta H_{tx_i}}{h} dr dx_i + \delta H_{rx_i} dr dx_i.$$

Upon substituting the previous conditions, the perturbed (metric) equation along the components (r, x_i) , and denoted by ε_{rx_i} , reads

$$\varepsilon_{rx_i} = \frac{ExQ_e}{2r^2} + H''_{tx_i} \left[\frac{r^2 h}{2} \right] + H'_{tx_i} 2rh - H_{tx_i} r^2 \left[\varepsilon_{x_i x_i} + k \left(\frac{\omega^2}{2r^2} \right)^k \right] = 0. \quad (8)$$

Here $\varepsilon_{x_i x_i}$, as before, stands for the metric equation along the components (x_i, x_i) , and hence the condition $\varepsilon_{x_i x_i} = 0$ holds. Now, as mentioned before, evaluating this expression at the location of the horizon r_h of the metric function h , we abstract the differential equation to be solved and instead obtain the expression for H_{tx_i} which is given by

$$H_{tx_i} = \frac{2^{k-1} E_{x_i} Q_e}{k \omega^{2k} r^{2(2-k)}} \Big|_{r=r_h}. \quad (9)$$

Finally, by substituting this expression into (7), we find that the diagonal components of the conductivity matrix are given by

$$\sigma_{DC_{x_i x_i}} = \frac{\partial J_{x_i}}{\partial E_{x_i}} = 1 + \frac{2^{k-1} Q_e^2}{k \omega^{2k} r_h^{2(2-k)}}. \quad (10)$$

Several observations can be made regarding this expression. The first, and by no means the least important, is that the expression does not explicitly depend on the hair q even though the scalar field does. Second, in the case of the “standard” axionic coupling $k = 1$, this expression matches exactly what is obtained in the context of a minimally coupled scalar field with axionic fields [1]. Additionally, for the conformal axionic coupling, i.e., $k = 2$, the explicit dependence on the horizon vanishes, and the DC conductivity will depend only on the ratio between the electric charge and the axionic charge. As a final comment, it is worth noting that the value $k = 3/2$ is not singular in the expression of the DC conductivity (10), unlike in the solution itself, see (3) and (4). Indeed, if the calculations for $k = 3/2$ were carried out using the solution (4), one would obtain the expression of the DC conductivity (10) with $k = 3/2$.

The expression we obtained is, for the most part, nearly identical to the one derived in [1,2] for a minimally coupled

scalar field, possibly with an interaction potential. This suggests that, even when considering more general terms in the action, as we have done in this example, the calculation of the DC conductivity remains unaffected. This impression will be further reinforced in the more general example we propose to discuss in the following section. Building on these observations, in the next section, we will consider a more general beyond-Horndeski theory. Guided by the insights gained from our previous analysis, we will examine the implications of extending the framework while ensuring consistency with the key findings. This approach will allow us to confirm that the conclusions drawn earlier remain valid, even in a broader theoretical context.

III. A MORE GENERAL SETUP

In order to extend our previous study to a more general model, we will consider the following Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{bH} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \psi_i \partial^\mu \psi_i \right)^k, \quad (11)$$

where we have defined

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi, X) R \\ &\quad + G_{4X}[(\square \phi)^2 - \phi^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu}] + G_5(\phi, X) G^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{G_{5X}}{6}[(\square \phi)^3 - 3 \square \phi \phi^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} + 2 \phi_{\mu\nu} \phi^{\nu\lambda} \phi^\mu_\lambda], \\ \mathcal{L}_{bH} &= F_4(\phi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \phi_\sigma \phi_\mu \phi_\alpha \phi_\nu \phi_\beta \phi_\gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

where the coupling functions G_i and F_4 can, *a priori*, be arbitrary functions of ϕ and the kinetic term X as defined by $X = -g^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu / 2$. In this more general setup, we unfortunately do not have explicit solutions, but we will proceed as before by assuming that a solution exists within the previous ansatz (2), and where the Maxwell gauge field reads

$$Q(r) = \int \frac{Q_e}{r^2} \sqrt{\frac{h}{f}} dr. \quad (13)$$

Furthermore, it is convenient to define the following function to considerably simplify the calculations, as was done in the case of the black hole solutions in [14,15]

$$W = G_4 - X \left(4F_4 X + 2G_{4X} - \sqrt{\frac{q^2 - 2hXf}{hf}} \frac{f}{r} G_{5X} - G_{5\phi} \right). \quad (14)$$

By performing the same calculation as before, the conserved currents are given by

$$\begin{aligned} \partial_r \left(-\sqrt{hf} a'_{x_i} - Q' r^2 H_{tx_i} \sqrt{\frac{f}{h}} \right) &= 0, \\ \Rightarrow J_{x_i} &:= -\sqrt{hf} a'_{x_i} - Q' r^2 H_{tx_i} \sqrt{\frac{f}{h}}, \\ &= -\sqrt{hf} a'_{x_i} - Q_e H_{tx_i}, \end{aligned} \quad (15)$$

The perturbed gauge field and metric are then given by

$$A_{x_i} = \delta \left(a_{x_i} - E \left(v - \int \frac{dr}{\sqrt{h(r)f(r)}} \right) \right) dx_i,$$

and

$$\begin{aligned} ds^2 &= -h dv^2 + 2\sqrt{\frac{h}{f}} dv dr + r^2 dx_1^2 + r^2 dx_2^2 \\ &+ \delta H_{tx_i} dv dx_i - \frac{\delta H_{tx_i}}{\sqrt{fh}} dr dx_i + \delta H_{rx_i} dr dx_i, \end{aligned} \quad (16)$$

To ensure the regularity of the metric, one imposes that

$$H_{rx_i} = \frac{H_{tx_i}}{\sqrt{fh}},$$

and, hence the perturbed equation ε_{rx_i} is given by

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rx_i} &= -\frac{E_{x_i} Q_e}{2r^2} - H''_{tx_i} \left[\frac{r^2 h W}{2} \right] \\ &- H'_{tx_i} \frac{r^2}{2} \left[\frac{h}{2} \left(\frac{f}{h} \right)' W + f \left(\frac{4W}{r} + W' \right) + \sqrt{\frac{f}{h}} \dot{W} \right] \\ &+ H_{tx_i} r^2 \left[\varepsilon_{x_i x_i} + k \left(\frac{\omega^2}{2r^2} \right)^k \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Here, as before the equation $\varepsilon_{x_i x_i} = 0$ holds, and the prime (resp. dot) stands for derivative with respect to the radial (resp. to the v) coordinate. The key novelty compared to the previous case lies in the evaluation of this expression at the horizon: the term proportional to $\dot{W}$ may no longer vanish if W depends on the coordinate v (which corresponds to t in our original ansatz). This could happen if for example W could depend explicitly on the scalar field. However, despite considering a general theory where the coupling functions could depend on both ϕ and X , solutions accommodating a scalar field of the form (2) are generally associated with shift-invariant theories, where the coupling functions depend only on X , [14,15]. Thus, without loss of generality, we can assume $\dot{W} = 0$, and in this case, the

evaluation at the horizon simplifies significantly yielding as before to

$$H_{tx_i} = -\frac{2^{k-1} E_{x_i} Q_e}{k \omega^{2k} r^{(4-2k)}} \Big|_{r=r_h} \quad (18)$$

Thus, by substituting this expression into (15), we find that the conductivity matrix is given as before

$$\sigma_{DC_{x_i x_i}} = 1 + \frac{2^{k-1} Q_e^2}{k \omega^{2k} r_h^{(4-2k)}}. \quad (19)$$

It is interesting to note that, even though we considered a more general action belonging to the beyond-Horndeski class, the perturbed equation $\varepsilon_{rx_i} = 0$ naturally includes a specific combination of the coupling functions, denoted as W and defined in (14). Remarkably, when evaluated at the horizon, these terms vanish, leaving only contributions from the electric and axionic charges. Consequently, we recover the same expression for the DC conductivity, namely an expression that does not depend in any way on the hair parameter q . This result confirms that the primary hair has no direct influence on the transport properties, with its role being entirely indirect through modifications to the horizon structure.

As we have just seen that the gravitational hair has no effect on conductivity, we now turn to the question of how the coupling of a scalar field to the Gauss-Bonnet invariant might influence conductivity. These models have recently attracted attention, with black hole solutions exhibiting properties inherent to the Gauss-Bonnet coupling being discovered and studied [26–34]. These solutions can be incorporated within our action (11) in the absence of the beyond-Horndeski term $\mathcal{L}_{bH} = 0$, considering a scalar field that depends only on the radial coordinate, that is $q = 0$. The model we will study is described by the following Horndeski coupling functions

$$\begin{aligned} G_2 &= -2\Lambda - 2\lambda e^{4\phi} + 12\beta e^{2\phi} X + 8\alpha X^2, \\ G_3 &= 8\alpha X, \\ G_4 &= 1 - \beta e^{2\phi} + 4\alpha X, \\ G_5 &= 4\alpha \log X. \end{aligned} \quad (20)$$

and as discussed in [29,35], this corresponds to the more general action leading to second-order field equations and whose scalar field equation is conformally invariant. In this setting, the metric solution f solution is given by

$$f(r) = \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{Q_e^2}{2r^4} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{(\omega^2/2r^2)^k}{(2k-3)} \right)} \right), \quad (21)$$

together with the same axionic and gauge field as previously

$$A_{mu}dx^\mu = -\frac{Q_e}{r}dt, \quad \psi_i(x) = \omega x_i.$$

For the scalar field solution, we have two possible branches. The first branch exists for $\lambda = 0 = \beta$ and given by

$$\phi(r) = \ln\left(\frac{c}{r}\right), \quad (22)$$

where c is integration constant. In this case, the auxiliary function W takes the following form

$$W = \frac{r + 2\alpha f(r)\phi'(r)(2 + r\phi'(r))}{r}, \quad (23)$$

and the perturbed equation ε_{rx_i} is then given by

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rx_i} = & -\frac{E_{x_i}Q_e}{2r^2} - H''_{tx_i} \left[\frac{r^2 f}{2} \left(1 - \frac{2\alpha f}{r^2} \right) \right] \\ & - H'_{tx_i} \frac{r^2}{2} \left[f \left(\frac{4(r^2 - \alpha f) - 2r\alpha f'}{r^3} \right) \right] \\ & + H_{tx_i} r^2 \left[\varepsilon_{x_i x_i} + k \left(\frac{\omega^2}{2r^2} \right)^k \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

When evaluating this expression on the horizon, we obtain that the expression of H_{tx_i} reduces to (18) and the conductivity matrix is given as before by (19).

For the second branch exists provided that $\lambda = 3\beta^2/4\alpha$, and in this case the scalar field reads

$$\phi(r) = \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}}{(c_2 + \int \frac{1}{r\sqrt{f(r)}} dr)}\right), \quad (25)$$

where c_2 is integration constant. In this case, the auxiliary function

$$W = \frac{r - \beta e^{2\phi(r)} + 2\alpha f(r)\phi'(r)(2 + r\phi'(r))}{r} \quad (26)$$

and as for the first branch, we obtain the same expression as (19). Hence, for this non-Noetherian conformal action [35], the two branches of solutions yield the same expression of the conductivity which is clearly independent of the Gauss-Bonnet coupling α .

IV. CONCLUSIONS AND FURTHER PROSPECTS

The paper explores the DC conductivity of black hole solutions in the context of beyond-Horndeski theories, with a particular focus on the role of primary hair. We have extended previous models by incorporating axionic fields

to introduce momentum dissipation and a Maxwell term to account for electromagnetic effects. Despite the explicit inclusion of the scalar hair parameter q in both the metric and the scalar field, our study demonstrates that the DC conductivity depends solely on the horizon location r_h and not on the hair parameter itself.

The analysis has then be extended to a broader class of beyond-Horndeski theories, and the findings are consistent even when general coupling functions are considered. This result indicates that the scalar hair, while influencing the horizon structure, does not have a direct effect on the transport properties of the black hole solutions.

In accordance with current literature, we have demonstrated that the DC conductivity depends on the axionic charge (which is responsible for momentum dissipation) and the location of the horizon. An interesting observation is that when the action of the axionic fields is conformally invariant (the case $k = 2$), this dependence on the horizon disappears. This raises an important question about the relationship between conformal invariance and the absence of horizon parameters in the DC conductivity. Understanding this relationship could provide deeper insights into how conformal symmetry affects transport properties, particularly in systems with momentum dissipation, and may help elucidate the role of axionic fields in holographic models. Specifically, further investigation is needed to explore why conformal invariance leads to a simplification where the horizon location no longer explicitly affects the conductivity, and what physical mechanisms are responsible for this phenomenon.

Future studies are suggested to examine the role of disformal transformations on axionic solutions, which could offer new insights into the effects of these transformations on the structure of black hole solutions and their corresponding transport properties. Indeed, we know that through a disformal transformation, solutions in the beyond-Horndeski class can be mapped to solutions belonging to the broader DHOST class [36]. This raises the question of whether, in this more general framework, the primary hair could have a direct influence on transport properties. Exploring this possibility requires analyzing how the disformal transformation modifies the structure of the coupling functions and whether these modifications lead to explicit dependencies of transport coefficients on the hair parameter. It is not entirely clear whether disformal transformations, which are typically used to map solutions belonging to scalar-tensor theory classes, can be applied in a more general context. In our case, the models we are working with also involve an electromagnetic field and axionic fields. As a result, it is not obvious that disformal transformations can act within this broader setup. A first step in addressing this question would be to explore how solutions from scalar-tensor theories, which include both a Maxwell field and axionic fields, are mapped through a disformal transformation. This would help to clarify

whether such transformations can be extended to these more complex models and provide a better understanding of their implications in modified gravity theories.

We have considered the possibility of a nonlinear action for the axions through the k-essence parameter, which impacts the DC conductivity. Similarly, we could have explored a nonlinear Maxwell Lagrangian as $(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})^p$ [37,38], where the parameter p would also influence the DC conductivity calculation. This approach could highlight how modifications to the field's kinetic terms, whether via the axionic or electromagnetic sector, can affect transport properties in holographic models. In the same register, it would be interesting to consider more general nonlinear electrodynamics, for which black hole solutions have recently been studied, see, e.g., [39,40]. It would be worthwhile to investigate whether their extensions remain viable in the presence of axions.

The initial objective of this work was to determine the extent to which the primary hair of axionic black hole solutions could influence holographic properties through the calculation of transport coefficients. Through our analysis, we have become convinced that no matter how general the theories accommodating these hairy solutions may be, the DC conductivity remains insensitive to the hair parameter. Nevertheless, it would be interesting to have a formal proof on our intuition, and we leave it for a further work.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been partially funded by ANID Grant No. 21231297.

DATA AVAILABILITY

No data were created or analyzed in this study.

-
- [1] A. Donos and J.P. Gauntlett, *J. High Energy Phys.* **11** (2014) 081.
 - [2] A. Donos and J.P. Gauntlett, *J. High Energy Phys.* **04** (2014) 040.
 - [3] M. Blake and D. Tong, *Phys. Rev. D* **88**, 106004 (2013).
 - [4] T. Andrade and B. Withers, *J. High Energy Phys.* **05** (2014) 101.
 - [5] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **05** (2012) 054.
 - [6] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **09** (2012) 008.
 - [7] M. M. Caldarelli, C. Charmousis, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **10** (2013) 015.
 - [8] A. Cisterna, C. Erices, X.-M. Kuang, and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **97**, 124052 (2018).
 - [9] A. Cisterna, L. Guajardo, and M. Hassaine, *Eur. Phys. J. C* **79**, 418 (2019); **79**, 710(E) (2019).
 - [10] M. Baggioli, A. Cisterna, and K. Pallikaris, *Phys. Rev. D* **104**, 104067 (2021).
 - [11] J.P. Figueroa and K. Pallikaris, *J. High Energy Phys.* **09** (2020) 090.
 - [12] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva, and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **96**, 124033 (2017).
 - [13] Y.-T. Hao, L.-Q. Fang, and L. Cheng, *Int. J. Theor. Phys.* **62**, 228 (2023).
 - [14] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoeur, and T. Nakas, *Phys. Rev. D* **109**, 024032 (2024).
 - [15] O. Baake, A. Cisterna, M. Hassaine, and U. Hernandez-Vera, *Phys. Rev. D* **109**, 064024 (2024).
 - [16] A. Bakopoulos, N. Chatzifotis, and T. Nakas, *Phys. Rev. D* **110**, 024044 (2024).
 - [17] A. Cisterna and C. Erices, *Phys. Rev. D* **89**, 084038 (2014).
 - [18] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 211101 (2015).
 - [19] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2015) 018.
 - [20] M. Crisostomi, K. Koyama, and G. Tasinato, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2016) 044.
 - [21] J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato, *J. High Energy Phys.* **12** (2016) 100.
 - [22] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
 - [23] N. Lecoeur, Exact black hole solutions in scalar-tensor theories, Ph.D. thesis, University of Paris-Saclay, 2024, [arXiv:2406.11095](#).
 - [24] J. Ben Achour, DHOST theories as disformal gravity: From black holes to radiative spacetimes, Other thesis, 2024, [arXiv:2412.04135](#).
 - [25] E. Babichev and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **08** (2014) 106.
 - [26] T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 251102 (2014).
 - [27] T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, *Phys. Rev. D* **90**, 124063 (2014).
 - [28] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, *Classical Quantum Gravity* **39**, 063001 (2022).
 - [29] P. G. S. Fernandes, *Phys. Rev. D* **103**, 104065 (2021).
 - [30] P. G. S. Fernandes, *Phys. Lett. B* **805**, 135468 (2020).
 - [31] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, *Phys. Rev. D* **106**, 064039 (2022).
 - [32] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, *Phys. Rev. D* **107**, 084050 (2023).
 - [33] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoeur, *Phys. Rev. D* **108**, 024019 (2023).
 - [34] N. Caceres, C. Corral, F. Diaz, and R. Olea, *J. High Energy Phys.* **05** (2024) 125.

-
- [35] E. Ayón-Beato and M. Hassaine, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **460**, 169567 (2024).
- [36] J. Ben Achour, D. Langlois, and K. Noui, *Phys. Rev. D* **93**, 124005 (2016).
- [37] M. Hassaine and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **75**, 027502 (2007).
- [38] M. Hassaine and C. Martinez, *Classical Quantum Gravity* **25**, 195023 (2008).
- [39] E. Ayón-Beato, D. Flores-Alfonso, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **110**, 064027 (2024).
- [40] J. Barrientos, A. Cisterna, M. Hassaine, and K. Pallikaris, *Phys. Lett. B* **860**, 139214 (2025).

Capítulo 7

Magnetotransporte holográfico con electrodinámica ModMax

En el capítulo anterior se estudió cómo la conductividad DC de una teoría de campos fuertemente acoplada puede calcularse analíticamente a partir de datos en el horizonte, empleando el formalismo de Donos y Gauntlett [132] junto con campos axiónicos para introducir disipación de momento. Allí se mostró además que, a pesar de la presencia explícita del pelo escalar primario en la métrica y en el campo escalar, la conductividad DC no depende directamente de dicho parámetro. Este resultado plantea de manera natural una pregunta más amplia: ¿qué ocurre si se modifica el propio sector electromagnético de la teoría? ¿Cómo afecta una extensión no lineal de la electrodinámica de Maxwell a las propiedades de transporte ya estudiadas, y qué nuevos fenómenos emergen al considerar parámetros adicionales?

Para responder estas preguntas, en este capítulo se extiende el marco holográfico anterior en dos direcciones. Por un lado, se reemplaza la electrodinámica de Maxwell por la teoría ModMax, una extensión no lineal que introduce un parámetro de deformación $\gamma \geq 0$ que controla la intensidad de la no linealidad —en el límite $\gamma \rightarrow 0$ se recupera Maxwell— y que, como se discute en los preliminares, es la única teoría en cuatro dimensiones que preserva simultáneamente la invariancia conforme y la dualidad electromagnética. Por otro lado, se incorpora un campo magnético externo en el bulk, lo que rompe la isotropía del sistema y da lugar a fenómenos de transporte transversal —como el efecto Hall y el efecto Nernst— que no están presentes en el capítulo anterior.

Un aspecto notable es que, para configuraciones estáticas diónicas, ModMax resulta ser on-shell equivalente a Maxwell con una constante de Newton efectiva, de modo que sus efectos genuinamente no lineales solo se manifiestan al introducir perturbaciones dependientes del tiempo. Es precisamente en este régimen donde la no linealidad controlada por γ modifica las corrientes conservadas en el bulk y, en consecuencia, las conductividades evaluadas en el

horizonte, permitiendo acceder a regímenes de transporte cualitativamente nuevos. En particular, se encuentra que la señal de Nernst reproduce cualitativamente el comportamiento observado en superconductores de cuprato de alta T_c [138],¹ con γ sintonizando la temperatura crítica y la temperatura de inicio.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. La sección de preliminares introduce los conceptos necesarios: la electrodinámica no lineal y la teoría ModMax, los agujeros negros diónicos y su termodinámica holográfica, y los efectos de Hall y Nernst en el contexto holográfico. Las secciones siguientes presentan los resultados originales [139].

7.1 Preliminares

7.1.1 Electrodinámica no lineal y teoría ModMax

La electrodinámica clásica de Maxwell, si bien extraordinariamente exitosa, predice una energía de auto-interacción divergente para cargas puntuales y no incorpora efectos de polarización del vacío cuántico. Estas limitaciones motivaron el desarrollo de extensiones no lineales de la teoría, conocidas como electrodinámicas no lineales (NLE). La idea central es reemplazar el Lagrangiano de Maxwell por uno más general que dependa de los dos invariantes de Lorentz que pueden construirse a partir del tensor de campo $F_{\mu\nu}$: el escalar

$$S = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (7.1.1)$$

que mide la diferencia entre las intensidades del campo eléctrico y magnético, y el pseudoescalar

$$P = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}, \quad (7.1.2)$$

que mide su producto escalar y se anula cuando los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí. El Lagrangiano general de una NLE es entonces $\mathcal{L}(S, P)$, con la condición de que en el límite de campo débil se recupere la electrodinámica de Maxwell $\mathcal{L}_M = -S/2$ [140].

Los ejemplos históricos más relevantes son la teoría de Born e Infeld [141], que elimina la divergencia de la autoenergía del electrón mediante una cota superior al campo eléctrico, y la

¹ T_c denota la temperatura crítica de superconductividad, es decir, la temperatura por debajo de la cual el material transita a una fase superconductora caracterizada por resistencia eléctrica nula y expulsión del campo magnético. Los cupratos son una familia de materiales cerámicos basados en óxido de cobre que exhiben superconductividad a temperaturas anómalamente altas en comparación con los superconductores convencionales, típicamente entre 30 y 130 K, razón por la cual se denominan superconductores de alta T_c .

acción efectiva de Euler y Heisenberg [142], que incorpora correcciones de un lazo a la QED derivadas de la polarización del vacío por pares virtuales electrón-positrón. Ambas teorías se reducen a Maxwell en el límite de campo débil y admiten soluciones de agujeros negros cargados al acoplarse a gravedad [116].

En cuatro dimensiones, la electrodinámica de Maxwell posee dos propiedades destacadas: la invariancia conforme de su acción y la simetría de dualidad electromagnética $SO(2)$ de sus ecuaciones de movimiento, que intercambia los campos eléctrico y magnético. La búsqueda de una teoría no lineal que preserve simultáneamente ambas simetrías —bajo supuestos de localidad y dependencia únicamente en los invariantes S y P — condujo al desarrollo de la electrodinámica ModMax [143, 144], definida por el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\text{MM}} = S \cosh \gamma - \sqrt{S^2 + P^2} \sinh \gamma, \quad (7.1.3)$$

donde $\gamma \geq 0$ es el parámetro de deformación introducido en la introducción de este capítulo. Esta teoría es la única extensión no lineal de Maxwell en cuatro dimensiones que preserva simultáneamente la invariancia conforme y la dualidad electromagnética continua bajo dichas hipótesis [143]. En el límite $\gamma \rightarrow 0$ se recupera la electrodinámica de Maxwell, mientras que para $\gamma \gg 1$ la teoría entra en un régimen fuertemente no lineal. La causalidad y la unitariedad imponen $\gamma \geq 0$, condición que además garantiza la convexidad del Lagrangiano respecto al campo eléctrico [143].

La dinámica de una NLE queda completamente determinada por las derivadas parciales del Lagrangiano respecto a los invariantes,

$$\mathcal{L}_S \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}, \quad \mathcal{L}_P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}, \quad (7.1.4)$$

que generalizan la permitividad y la permeabilidad del medio: $\mathcal{L}_S$ controla la respuesta del sistema ante variaciones del invariante escalar S , es decir, ante cambios en la diferencia entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético, mientras que $\mathcal{L}_P$ controla la respuesta ante variaciones del pseudoescalar P , es decir, ante cambios en la alineación relativa entre ambos campos. En el caso de Maxwell, $\mathcal{L}_S = -1/2$ y $\mathcal{L}_P = 0$, recuperando las relaciones constitutivas lineales del vacío. Para ModMax, estas derivadas toman la forma

$$\mathcal{L}_S = \cosh \gamma - \frac{S}{\sqrt{S^2 + P^2}} \sinh \gamma, \quad \mathcal{L}_P = -\frac{P}{\sqrt{S^2 + P^2}} \sinh \gamma, \quad (7.1.5)$$

de modo que las ecuaciones de movimiento adoptan la forma $\nabla_\mu (\mathcal{L}_S F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_P \epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} F_{\lambda\rho}) =$

0, que generaliza las ecuaciones de Maxwell incorporando las no linealidades del sector electromagnético. En el contexto holográfico, esta modificación altera las corrientes conservadas en el bulk y, en consecuencia, las expresiones de las conductividades evaluadas en el horizonte.

Una propiedad relevante para el análisis holográfico es que para configuraciones estáticas diónicas, los invariantes S y P resultan proporcionales, lo que permite reescribir el Lagrangiano de ModMax como el de Maxwell con una constante de Newton efectiva. Esta equivalencia on-shell implica que las propiedades termodinámicas de los agujeros negros diónicos son idénticas a las de Maxwell con cargas reescaladas, y que los efectos genuinamente no lineales de ModMax solo se manifiestan al introducir perturbaciones dependientes del tiempo, siendo precisamente este el régimen relevante para el cálculo de las conductividades holográficas.

Es importante distinguir ModMax de otras extensiones vectoriales estudiadas en esta tesis. En el Capítulo 4 se estudió la teoría de Proca generalizada, que extiende la dinámica de un campo vectorial masivo preservando la ausencia de modos fantasma mediante condiciones de degeneración. ModMax, en cambio, es una extensión del sector gauge sin masa² de Maxwell, cuya no linealidad proviene exclusivamente de la estructura del Lagrangiano electromagnético y no involucra mecanismos de masa ni acoplamiento no minimal con la curvatura.

7.1.2 Agujeros negros diónicos y termodinámica holográfica

Un agujero negro diónico es una solución gravitacional que porta simultáneamente carga eléctrica Q_E y carga magnética Q_M .³ En la relatividad general acoplada a Maxwell, el prototipo es el agujero negro de Reissner-Nordström diónico, cuya métrica en espacios asintóticamente AdS toma la forma [145]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_k^2, \quad f(r) = k + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{q_E^2 + q_M^2}{r^2}, \quad (7.1.6)$$

donde $d\Sigma_k^2$ es el elemento de línea de la variedad base con curvatura $k \in \{-1, 0, 1\}$, correspondiente a geometrías hiperbólica, plana y esférica respectivamente, l es el radio de AdS, m

²Un campo de gauge sin masa es aquel cuyo bosón mediador no posee masa en reposo, como ocurre con el fotón en la electrodinámica de Maxwell. La ausencia de masa está asociada a la invarianza gauge de la teoría: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, que impide la aparición de un término de masa $\sim m^2 A_\mu A^\mu$ en el Lagrangiano sin romper dicha simetría. En contraste, la teoría de Proca introduce explícitamente un término de masa que rompe la invarianza gauge.

³El término *diónico* proviene de *dión*, una partícula hipotética que posee simultáneamente carga eléctrica y magnética, propuesta por Schwinger en el contexto de la dualidad electromagnética. En el contexto de agujeros negros, la carga magnética no requiere la existencia de monopolos magnéticos aislados, sino que puede interpretarse como una condición de borde sobre el campo gauge en el horizonte.

es la masa del agujero negro y q_E , q_M son los parámetros de carga eléctrica y magnética. El campo gauge asociado porta tanto componente eléctrica como magnética, lo que en la teoría dual se interpreta como un sistema a densidad de carga finita $\rho \propto q_E$ sometido a un campo magnético externo $B \propto q_M$. La presencia simultánea de ambas cargas es esencial para estudiar efectos de transporte transversal en holografía: mientras que la carga eléctrica determina la densidad de portadores de carga en la teoría dual, el campo magnético rompe la isotropía del sistema y da lugar al efecto Hall, como se discute en la subsección siguiente.

Cuando la electrodinámica de Maxwell se reemplaza por ModMax, la función métrica se modifica a [146]

$$f(r) = k + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{(q_E^2 + q_M^2)e^{-\gamma}}{r^2}, \quad (7.1.7)$$

donde el factor $e^{-\gamma}$ refleja el reescalamiento efectivo de las cargas por el parámetro de deformación. Esta es precisamente la manifestación de la equivalencia on-shell discutida en la subsección anterior: la geometría de ModMax es isométrica a la de Reissner-Nordström con cargas reescaladas, de modo que sus efectos genuinamente no lineales solo emergen al nivel de las perturbaciones.

La termodinámica de estos agujeros negros se enriquece considerablemente en el contexto de la *termodinámica de fase extendida* [147], donde la constante cosmológica negativa se interpreta como una presión termodinámica,⁴

$$P = \frac{3}{8\pi G l^2}, \quad (7.1.8)$$

con volumen termodinámico conjugado $V = \frac{1}{3}\omega_k r_+^3$. En este marco, la primera ley se extiende a

$$dM = T dS + \Phi_E dQ_E + \Phi_M dQ_M + V dP, \quad (7.1.9)$$

donde Φ_E y Φ_M son los potenciales eléctrico y magnético evaluados en el horizonte. Las cantidades termodinámicas satisfacen además la relación de Smarr [147]

$$M = 2TS - 2PV + \Phi_E Q_E + \Phi_M Q_M, \quad (7.1.10)$$

que es una identidad de escala derivada del teorema de Euler aplicado a la masa como función homogénea de las cargas extensivas. La estabilidad termodinámica del sistema queda

⁴Esta interpretación surge de la analogía entre la ecuación de estado de los agujeros negros en AdS y la ecuación de estado de un gas de van der Waals. En este marco, el par (P, V) juega el mismo papel que en la termodinámica clásica, y la masa del agujero negro se identifica con la entalpía del sistema en lugar de su energía interna [147].

determinada por el signo del calor específico C_P : los agujeros negros grandes en AdS tienen $C_P > 0$ y pueden alcanzar equilibrio térmico estable [148], a diferencia del caso asintóticamente plano donde $C_P < 0$ y el agujero negro se evapora indefinidamente.

Desde la perspectiva holográfica, la temperatura de Hawking se identifica con la temperatura del estado térmico de la CFT dual [104], y la acción on-shell renormalizada se asocia al potencial termodinámico del ensamble gran canónico [149], permitiendo obtener todas las cantidades físicas mediante diferenciación funcional. En el caso de ModMax, como se discutió en la subsección anterior, esta acción on-shell es equivalente a la de Maxwell con cargas reescaladas, de modo que la estructura de fases y las transiciones termodinámicas son cualitativamente idénticas a las del caso lineal, con el parámetro γ actuando únicamente como un reescalamiento de las cargas efectivas.

7.1.3 Magnetotransporte holográfico: efecto Hall y señal de Nernst

El magnetotransporte se refiere al conjunto de propiedades de transporte de un sistema en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$. A nivel clásico, cuando una corriente eléctrica fluye a través de un conductor sometido a un campo magnético perpendicular, los portadores de carga experimentan una fuerza de Lorentz transversal

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (7.1.11)$$

que los desvía de su trayectoria original. Este fenómeno, descubierto por Edwin Hall en 1879 [150], da lugar a la acumulación de carga en las paredes laterales del conductor y a la aparición de un campo eléctrico transversal conocido como campo de Hall. En el estado estacionario, este campo compensa exactamente la fuerza magnética, estableciendo un equilibrio transversal que permite medir la densidad y el signo de los portadores de carga del material.

En presencia de un campo magnético, la respuesta del sistema a perturbaciones eléctricas ya no es isótropa y queda codificada en una matriz de conductividades 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (7.1.12)$$

donde σ_{xx} es la conductividad longitudinal, que describe el transporte en la dirección del campo eléctrico aplicado, y σ_{xy} es la conductividad de Hall, que describe el transporte transversal

inducido por el campo magnético. El *ángulo de Hall*, definido como

$$\tan \theta_H = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}, \quad (7.1.13)$$

cuantifica la desviación de los portadores de carga respecto a la dirección del campo eléctrico aplicado. En metales convencionales el ángulo de Hall depende suavemente de la temperatura, comportamiento que queda bien descrito por la teoría de Fermi del metal [124]. Sin embargo, en los llamados *metales extraños* de cuprato —materiales que no admiten una descripción en términos de cuasipartículas de Fermi⁵— se observa una dependencia anómala $\tan \theta_H \sim T^{-2}$ [151, 152], que no puede explicarse en el marco de la teoría de Fermi convencional. Esta anomalía ha sido reproducida exitosamente en modelos holográficos [153], donde el ángulo de Hall emerge naturalmente de la estructura near-horizon del agujero negro dual.

El *efecto Nernst* es un fenómeno termoeléctrico análogo al efecto Hall, con la diferencia de que el gradiente que impulsa el transporte es térmico en lugar de eléctrico [154]. Consideremos un conductor en presencia de un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano de transporte: si se aplica un gradiente de temperatura ∇T a lo largo de una dirección, los portadores de carga más calientes se mueven hacia la región fría transportando momento y energía. En presencia del campo magnético, la fuerza de Lorentz desvía este flujo térmico transversalmente, generando una acumulación de carga y, en consecuencia, un campo eléctrico transversal. La señal de Nernst e_N cuantifica esta respuesta termoeléctrica transversal,

$$e_N \equiv \vartheta_y^x = -(\rho \alpha)_y^x, \quad (7.1.14)$$

donde $\rho = \sigma^{-1}$ es la matriz de resistividad y α es la matriz de conductividad termoeléctrica. En metales convencionales la señal de Nernst es pequeña y lineal en el campo magnético. Sin embargo, en los superconductores de cuprato de alta T_c exhibe un perfil en forma de campana en función del campo magnético [138], característico de una fase de líquido de vórtices con vórtices móviles que transportan entropía. Cuando la señal se vuelve negativa, indica una transición hacia una fase dominada por excitaciones de cuasipartículas [155]. El parámetro de deformación γ de ModMax permite sintonizar la temperatura crítica y la temperatura de inicio de estas fases, ofreciendo un mecanismo natural para modelar diferentes familias de

⁵La teoría del líquido de Fermi, desarrollada por Landau, describe los metales como un sistema de cuasipartículas que se comportan como electrones casi libres con masa renormalizada. En los metales extraños de cuprato esta descripción falla: las interacciones entre los portadores de carga son tan fuertes que no pueden ser tratadas perturbativamente, y el concepto de cuasipartícula bien definida deja de ser aplicable. Este es precisamente el régimen donde la correspondencia AdS/CFT ofrece una descripción alternativa.

cupratos dentro del marco holográfico.

En el contexto holográfico, tanto el ángulo de Hall como la señal de Nernst pueden calcularse analíticamente a partir de datos en el horizonte [132], extendiendo el formalismo de corrientes conservadas introducido en el capítulo anterior al caso con campo magnético externo. La presencia de B introduce componentes fuera de la diagonal en todas las matrices de conductividad —eléctrica, termoeléctrica y térmica— enriqueciendo la estructura del transporte dual. En el caso de ModMax, la no linealidad del sector electromagnético introduce correcciones adicionales a estas matrices que dependen del parámetro γ , permitiendo explorar regímenes de materia fuertemente acoplada con comportamientos cualitativamente distintos a los accesibles con la electrodinámica de Maxwell estándar.

ModMax electrodynamics and holographic magnetotransport

José Barrientos^{1,2,*} Nicolás Cáceres^{3,†} Felipe Díaz^{4,‡} and Ulises Hernandez-Vera^{5,§}

¹*Sede Esmeralda, Universidad de Tarapacá, Avenida Luis Emilio Recabarren 2477, Iquique, Chile*

²*Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic*

³*Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile,
Avenida Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile*

⁴*Institute for Theoretical and Mathematical Physics, Lomonosov Moscow State University,
119991 Moscow, Russia*

⁵*Instituto de Matemáticas, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca 3460000, Chile*



(Received 21 June 2025; accepted 26 September 2025; published 28 October 2025)

We study magnetotransport in a holographic model where ModMax nonlinear electrodynamics is coupled to Einstein anti-de Sitter gravity. To incorporate momentum relaxation, we introduce spatially linear free scalar fields that break translational symmetry, resulting in an anisotropic medium. Using linear response theory, we compute the DC conductivity matrix in the presence of an external magnetic field, expressing the conductivities in terms of horizon data. Our results demonstrate how the nonlinear ModMax parameter modifies charge transport, particularly influencing the Hall angle and Nernst signal. The nonlinear corrections introduce distinct deviations in both longitudinal and Hall conductivities while preserving the characteristic temperature scaling of strange metals, offering new insights into strongly coupled systems with nonlinear electromagnetic interactions. Notably, the Nernst signal reproduces that of high- T_c cuprate superconductors showing a superconducting dome and a normal phase, with the ModMax deformation parameter tuning critical and onset temperatures. In the strongly nonlinear regime, we find evidence of an exotic state dominated by quasiparticle excitations in the dual material.

DOI: [10.1103/d3tj-4nd8](https://doi.org/10.1103/d3tj-4nd8)

I. INTRODUCTION

Holography [1,2], particularly the AdS/CFT correspondence [3–5], provides a powerful framework for studying strongly correlated systems. It is a unique approach in which open questions become more computationally manageable and conceptually transparent. In particular, exploiting the fact that certain macroscopic phenomena can be captured without detailed knowledge of the underlying microscopic physics—a property often referred to as UV-independence—holography has been fruitfully applied to condensed matter theory (CMT). It does so by mapping complex quantum many-body systems onto gravitational theories in higher-dimensional spacetimes. For comprehensive reviews and an extensive list of references, see [6–8].

A particularly remarkable achievement in this area is the ability to model high- T_c superconductors using holographic techniques [9–11], see [12] for a review. This begins with introducing a charged topological black hole in the bulk,¹ which places the boundary theory on a Minkowski background geometry and at finite density by sourcing a global $U(1)$ symmetry with an associated chemical potential. If the black hole is nonextremal, the dual field theory is also in a thermal state,² as the Hawking temperature of the black hole is identified with the temperature of the boundary theory [15]. The system also requires to dress the black hole horizon with quantum fields, so the model is further coupled to a massive, complex, charged scalar field that condenses near the black hole horizon, leading to the spontaneous breaking of the Abelian gauge symmetry [16,17] and signaling the onset of superconductivity in the boundary theory. The framework allows us to study superconductivity in strongly coupled regimes, where traditional Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) theory

*Contact author: jbarrientos@academicos.uta.cl

†Contact author: ntcaceres@puc.cl

‡Contact author: fdiaz@itmp.msu.ru

§Contact author: uhernandez.vera@gmail.com

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

¹The term *topological black holes* has historically been used to describe black holes whose horizons exhibit nontrivial topology (see, for example, [13]).

²For a detailed analysis of the zero-temperature limit of the holographic superconductor, see [14].

may fail. The bulk theory has been extensively developed to capture a range of phenomena associated with $(2 + 1)$ -dimensional superconductors and strange metals. These extensions include higher-curvature corrections [18,19], nonminimal scalar couplings [20–28], the incorporation of fermionic excitations [29–38], addition of topological terms in the gauge sector [39–41], and modifications to scalar field profiles to model lattice effects in the boundary theory [42–44] (see, e.g., [45] for a review). A particularly notable extension involves incorporating nonlinearities in the gauge sector. Nonlinear electrodynamics (NLE) refers to classical extensions of Maxwell’s theory that are significant in strong-field regimes while smoothly reducing to Maxwell’s electrodynamics in the weak-field limit [46]. The origins of these theories can be traced back to the works conducted by Born and Infeld [47], who aimed to remove the divergence associated with the self-energy of the electron, and Euler and Heisenberg [48], who developed a one-loop effective action for quantum electrodynamics incorporating vacuum polarization effects from virtual electron-positron pairs. NLE Lagrangians can be consistently incorporated into the holographic framework, thereby extending the range of dual field theories accessible within this approach. This inclusion is well-motivated as in the IR limit, the string theory partition function acquires higher-curvature corrections, and Kaluza-Klein reductions naturally yield couplings between nonlinear gauge sectors and gravity [49]. Additionally, nonlinear kinetic terms for vector fields arise from the quantization of string actions [50]. Within the gauge/gravity correspondence, nonlinear electrodynamics has been extensively employed (see, e.g., [51–64]) as it allows for nontrivial modifications of the bulk geometry. Several notable analytic solutions incorporating nonlinear gauge fields can be found in [65–77]. In the context of holographic superconductors, nonlinear electrodynamics has also been widely explored to access different physical regimes and to alter transport properties in the boundary theory (see, for example, [78–86]).

In four dimensions, two of Maxwell theory’s most notable properties are the electromagnetic duality of its field equations and the conformal invariance of its action. Recently, the goal of preserving these symmetries beyond the linear regime led to the development of ModMax theory [87,88]; a one-parameter extension of Maxwell electrodynamics in four dimensions. ModMax emerges in the conformal limit of Dirac-Born-Infeld (DBI) nonlinear electrodynamics and also arises in higher-rank gauge field generalizations within string and M-theory frameworks [89] (see also [90]). As we will show in Sec. II, the ModMax action reduces on shell to standard Maxwell theory in configurations that either lack magnetic fields or exhibit a linear relation between the Lorentz scalar and pseudoscalar invariants [see Eq. (2.3)]. Consequently, it is essential to introduce magnetic fields in the bulk to probe the holographic implications of the theory’s nonlinear structure.

Introducing magnetic fields in the AdS/CMT correspondence significantly enriches the structure of the boundary theory, allowing for the investigation of more realistic condensed matter phenomena, such as the Hall effect [91–98], the Meissner effect [99–104], and the Nernst effect [105,106]. The Hall angle quantifies the deflection of charge carriers under the influence of a magnetic field, indicating how much the electric current deviates from the direction of the applied electric field. In cuprate strange metals, the Hall angle exhibits an anomalous temperature dependence [107,108], a feature that has been successfully reproduced in holographic scalar-vector models (see for instance [93,109,110]). The Nernst effect is a thermoelectric phenomenon observed in conducting materials, where an electric field is generated perpendicular to both an applied magnetic field and a thermal gradient. It is quantified by the Nernst coefficient, which measures the transverse voltage produced in response to these perturbations. Remarkably, it can be used to probe high- T_c superconductors as the Nernst effect shows that the normal phase of cuprate superconductor is aberrant [111–114]. In [114], it is shown that the Nernst signal becomes bell-shaped for these materials and shows a linear decay after the onset temperature. The sign of the Nernst signal indicate different phases for high- T_c superconductors; if the signal is positive indicates that the system is in a vortex-liquid phase with mobile vortices that carry entropy, and a temperature gradient causes them to move generating perpendicular magnetic fields contributing to the signal, and if the signal becomes negative is usually associated with quasiparticle excitations [115].

Despite the simplicity of ModMax theory—stemming from the maximal symmetry of its Lagrangian—its holographic implications remain largely unexplored.³ Indeed, since the theory preserves the Maxwellian $SO(2)$ duality rotation symmetry, the dual field theory automatically respects particle-vortex duality [92] that allows to describe Drude-like conductivities [118]. Given its tractable structure, ModMax provides a compelling framework to probe nonlinear effects in the gauge/gravity correspondence. In this work, we couple ModMax electrodynamics to anti-de Sitter (AdS) gravity and investigate the magnetotransport properties of the dual field theory. We find that the theory extends the landscape of holographic magnetotransport beyond Maxwell electrodynamics and may offer insights into exotic phases of quantum matter. Of particular interest is the highly nonlinear regime, which has not been previously studied in this context. We also discuss how ModMax nonlinearities can be leveraged to more realistically model high- T_c cuprate superconductors, as the deformation parameter γ allows for distinct behavior between hole-doped and electron-doped systems.

³For recent holographic applications, see [116,117].

This paper is organized as follows. In Sec. II, we introduce the gravitational bulk theory consisting of AdS gravity coupled to ModMax nonlinear electrodynamics, and study topological dyonic black hole solutions along with their holographic thermodynamics. We show that the theory reduces on shell to standard Maxwell electrodynamics for the static configurations considered. In Sec. III A, we analyze time-dependent perturbations in the hydrodynamic limit to compute the DC conductivities using Kubo formulas, finding that the resulting magnetotransport describes a boundary theory in a perfect Hall state. In Sec. III B, we include scalar fields with linear transverse profiles to break translational symmetry and model lattice effects in the dual theory. We compute the Hall angle and the Nernst signal, showing that the system exhibits behaviors similar to those observed in high- T_c superconductors, with the deformation parameter enabling access to novel regimes beyond the reach of standard Maxwell electrodynamics. Finally, in Sec. IV, we conclude with open questions and potential future directions.

II. DYONIC BLACK HOLES AND HOLOGRAPHIC THERMODYNAMICS

We are interested in constructing dyonic black holes by considering NLE theories coupled to AdS gravity. In this framework, nonlinear corrections to the bulk $U(1)$ gauge field modify the boundary transport properties, offering new avenues for exploring holographic phenomena. A particularly simple yet intriguing NLE theory is ModMax electrodynamics, which has attracted growing attention in gravitational contexts, especially in black hole physics. When coupled to general relativity, it gives rise to new classes of charged black holes, including spherically symmetric solutions that generalize the dyonic Reissner-Nordström metric [119,120]. Notably, a Melvin-Bonnor-ModMax background and its (A)dS generalizations have enabled the embedding of Schwarzschild and C-metric black holes into an electromagnetic universe, representing the first black hole solutions embedded in an electromagnetic universe in the context of nonlinear electrodynamics [121]. In these static configurations, the electromagnetic invariants satisfy a proportionality relation. This property ensures that all such Maxwell solutions automatically solve the ModMax field equations, effectively reducing the Einstein-ModMax system to the Einstein-Maxwell system with a rescaled Newton constant. As we will show, a consequence of this feature is that key physical properties—such as black hole thermodynamics, phase transitions, and potentially their holographic behavior—remain unaffected, aside from modifications to the effective couplings.

The rich symmetry structure and inherent nonlinearities of the theory make it an appealing framework for exploring holographic models at finite density with nonlinear

corrections. We therefore consider ModMax electrodynamics minimally coupled to four-dimensional AdS gravity, described by the renormalized action,

$$S_{\text{ren}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{MM}} + S_{\text{bdry}}, \quad (2.1)$$

where the Einstein-Hilbert action is

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{6}{\ell^2} \right), \quad (2.2)$$

with ℓ denoting the AdS radius. The ModMax contribution reads,

$$\begin{aligned} S_{\text{MM}} &= -\frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{MM}} \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{S} \cosh \gamma - \sqrt{\mathcal{S}^2 + \mathcal{P}^2} \sinh \gamma), \end{aligned} \quad (2.3)$$

where $\mathcal{S} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ and $\mathcal{P} = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} F^{\mu\nu}$ are the Lorentz scalar and pseudoscalar invariants, respectively. Here, $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ is the field strength of the $U(1)$ gauge field A_μ , and $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ is the Levi-Civita tensor. The dimensionless ModMax deformation parameter γ is restricted to a positive number as causality and unitarity require. This bound also guarantees the convexity of the Lagrangian with respect to the electric field [87]. The boundary action is added to ensure a well-defined variational principle and finiteness of the on shell action [122] and is given by

$$S_{\text{bdry}} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[K - \frac{2}{\ell} + \frac{\ell}{2} \mathcal{R}(h) \right], \quad (2.4)$$

where h_{ij} is the induced metric at $r = \infty$ with scalar curvature $\mathcal{R}(h)$, and $K = h^{ij} K_{ij}$ is the trace of the extrinsic curvature along the holographic coordinate. Note that we do not include a boundary term for the matter sector, as the ModMax Lagrangian vanishes sufficiently fast on shell near the boundary for the class of configurations considered in this work.

The field equations read,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \left(\mathcal{L}_{\mathcal{S}} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{P}} F^{\lambda\rho} \right) &= 0, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{3}{\ell^2} g_{\mu\nu} - 8\pi G T_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MM}}}{\partial \mathcal{S}}, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{P}} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MM}}}{\partial \mathcal{P}}, \quad (2.6)$$

and the (traceless) stress tensor reads

$$8\pi GT_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 4\mathcal{L}_S F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} + 2(\mathcal{P}\mathcal{L}_P - \mathcal{L}_{\text{MM}})g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

An exact dyonic black hole solution to the field equations is described by the line element,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \gamma_{\hat{a}\hat{b}}^{(k)} dx^{\hat{a}} dx^{\hat{b}}, \quad (2.8)$$

where

$$f(r) = k + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{2m}{r} + \frac{(q_E^2 + q_M^2)}{r^2} e^{-\gamma}, \quad (2.9)$$

and $\gamma_{\hat{a}\hat{b}}^{(k)}$, with indices $\hat{a} = 1, 2$, is the metric of the codimension-2 Killing horizon surface Γ parametrized by $k = 0, 1, -1$ describing a flat, spherical, hyperbolic topology, respectively, i.e.,

$$d\Omega_k^2 \equiv \gamma_{\hat{a}\hat{b}}^{(k)} dx^{\hat{a}} dx^{\hat{b}} = \begin{cases} d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, & k = 1, \\ dx^2 + dy^2, & k = 0, \\ d\rho^2 + \sinh^2\rho d\varphi^2, & k = -1, \end{cases} \quad (2.10)$$

and, modulo constant terms, the gauge field reads,

$$A = \begin{cases} \frac{q_E}{r} e^{-\gamma} dt + q_M \cos\theta d\phi, & k = 1, \\ \frac{q_E}{r} e^{-\gamma} dt + q_M x dy, & k = 0, \\ \frac{q_E}{r} e^{-\gamma} dt + q_M \cosh\rho d\varphi, & k = -1. \end{cases} \quad (2.11)$$

The solution has an electric and magnetic charge that can be computed using Gauss's law,⁴

$$\begin{aligned} Q_E &= \frac{1}{4\pi G} \oint_{\Sigma_\infty} \star E = \frac{\omega_k}{4\pi G} q_E, \\ Q_M &= \frac{1}{4\pi G} \oint_{\Sigma_\infty} F = \frac{\omega_k}{4\pi G} q_M, \end{aligned} \quad (2.12)$$

where $\star$ indicates Hodge-dualization, ω_k is the volume of the horizon two-surface, which $\omega_1 = 4\pi$ and divergent otherwise, and

$$E^{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (2.13)$$

This explicitly shows the model's electromagnetic duality $q_E \leftrightarrow q_M$.

⁴They can also be obtained by computing the electromagnetic flux across the black hole horizon [123], finding the same results.

The quasilocal stress tensor,

$$\tau_{ij} := -\frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta h^{ij}} = -\frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K h_{ij} + \frac{2}{\ell} h_{ij} - \ell G_{ij}(h) \right), \quad (2.14)$$

gives the holographic stress tensor as [124]

$$\begin{aligned} \langle T_{ij} \rangle &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\ell} \tau_{ij} = \frac{m}{8\pi G} \text{diag}[2\ell^{-2}, 1, \mathcal{V}], \\ \mathcal{V} &\equiv \begin{cases} \sin^2\theta, & k = 1, \\ 1, & k = 0, \\ \sinh^2\rho & k = -1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

that is traceless and covariantly conserved, which can be written as the one of a perfect conformal fluid,

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(g_{ij}^{(0)} + 3u_i u_j \right), \quad (2.16)$$

where the fluid three-velocity

$$u^i \partial_i = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}^{(0)}}} \partial_t, \quad u_i u_j g_{(0)}^{ij} = -1. \quad (2.17)$$

Similarly, the electromagnetic current of the dual theory is defined as

$$\begin{aligned} \langle J^i \rangle &:= \frac{1}{\sqrt{-g^{(0)}}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta A_i^{(0)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g^{(0)}}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{-g}}{2\pi G} \left(\mathcal{L}_S F^{ri} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_P \epsilon_{ra\beta\gamma} g^{rr} g^{ai} F^{a\beta} \right) \right] \\ &= \frac{q_E}{4\pi G \ell^2} \delta^i_t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

where

$$A^{(0)} = \lim_{r \rightarrow \infty} A_i dx^i = \begin{cases} q_M \cos\theta d\phi, & k = 1, \\ q_M x dy, & k = 0, \\ q_M \sinh\rho d\varphi, & k = -1, \end{cases} \quad (2.19)$$

is the boundary gauge field, and

$$g_{ij}^{(0)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ell^2}{r^2} h_{ij} \quad (2.20)$$

is the boundary metric. One can check that the holographic quantities satisfy the Ward identities

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i^{(0)} \langle J^i \rangle, \\ 0 &= \nabla_{(0)}^i \langle T_{ij} \rangle + \langle J^i \rangle F_{ij}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

with $\nabla_i^{(0)}$ the Levi-Civita covariant derivative with respect to $g^{(0)}$, and $F_{ij}^{(0)}$ the curvature of the boundary gauge field.

We can compute the holographic energy by using the fact that if the boundary metric has a Killing vector field $\hat{\xi} = \hat{\xi}^i \partial_i$ satisfying $\mathcal{L}_{\hat{\xi}} g_{ij}^{(0)} = 0 = \mathcal{L}_{\hat{\xi}} A^{(0)}$, then we have the following identity:

$$\nabla_i^{(0)}[(\langle T^i_j \rangle + \langle J^i \rangle A_j^{(0)}) \hat{\xi}^j] = 0. \quad (2.22)$$

Then, we can compute conserved quantities by integrating the conserved current $j^i = \langle T^i_j \rangle + \langle J^i \rangle A_j^{(0)}$ over a two-dimensional spatial hypersurface $\hat{\Sigma}_\infty$ as

$$Q_\xi = \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} d^2x \sqrt{-\hat{\sigma}} \hat{u}_i j^i, \quad (2.23)$$

where the spacelike surface $\hat{\sigma}$ is described by using the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) decomposition of the boundary metric

$$ds_{(0)}^2 = -\hat{N}^2 dt^2 + \hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}(dx^{\hat{a}} + \hat{N}^{\hat{a}} dt)(dx^{\hat{b}} + \hat{N}^{\hat{b}} dt), \quad (2.24)$$

and $\hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}$ is the induced metric on $\hat{\Sigma}_\infty$, with future-directed unit normal vector

$$\hat{u} \equiv \hat{u}^i \partial_i = \frac{1}{\hat{N}}(\partial_t - \hat{N}^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}}). \quad (2.25)$$

In the case at hand, the only nontrivial conserved quantity is the holographic energy associated with $\hat{\xi} = \partial_t$ that gives

$$\begin{aligned} M &= \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} d^2y \sqrt{-\hat{\sigma}} \hat{u}_i (\langle T^i_t \rangle + \langle J^i \rangle A_t^{(0)}) \hat{\xi}^t \\ &= \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} d^2y \sqrt{-\hat{\sigma}} \langle T^t_t \rangle = \frac{\omega_k m}{4\pi G}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

One can easily check that the energy matches the one found using conformal methods [125]. Consider a Weyl rescaling of the metric $\hat{g} = \hat{\Omega}^2 g$ to remove the boundary divergences of the line element and construct a conserved charge,

$$Q(\xi) = \frac{\ell}{8\pi G} \lim_{\hat{\Omega} \rightarrow 0} \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} d\hat{S}^\mu \hat{n}^\alpha \hat{n}^\beta \hat{W}^\nu_{\alpha\mu\beta} \xi_\nu, \quad (2.27)$$

where $\hat{W}^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ is the Weyl tensor of $\hat{g}$, $\hat{n}_\mu = \frac{\ell \partial_\mu \hat{\Omega}}{\sqrt{|\hat{\Omega}|}}$ is the outward pointing normal to the boundary, and $d\hat{S}^\mu = \ell^2 d\Omega_k^2 \delta_t^\mu$ is the spacelike surface element tangent to $\hat{\Omega} = 0$. We find for $\hat{\Omega} = r^{-1}$,

$$Q(\partial_t) = \frac{\omega_k m}{4\pi G} = M, \quad (2.28)$$

in agreement with the holographic energy (2.26).

The electric and magnetic charges can also be computed with these boundary quantities by

$$Q_E = - \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} d^2x \sqrt{-\hat{\sigma}} \hat{u}_i \langle J^i \rangle = \frac{1}{4\pi G} \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} \star E = \frac{\omega_k}{4\pi G} q_E \quad (2.29)$$

and the magnetic charge

$$Q_M = \frac{1}{4\pi G} \oint_{\hat{\Sigma}_\infty} F_{(0)} = \frac{\omega_k}{4\pi G} q_M, \quad (2.30)$$

in agreement with (2.12).

A particularly interesting solution regime corresponds to considering the ultranonlinear regime $\gamma \gg q_E$. In this limit, the geometry recovers that of AdS-Schwarzschild's black holes, and the gauge field becomes purely magnetic, ceasing to contribute to the on shell action. This would correspond to a magnetic stealth charge over the uncharged black hole. Notice that in the dual theory, the gauge potential $A^{(0)}$ and the vacuum expectation value of the corresponding $U(1)$ current, $\langle J^i \rangle$, remain both constant in this limit. In this regime, we notice that the solution resembles the one found perturbatively by Wald for describing black holes in magnetic backgrounds generated by accretion disks [126].

To proceed with the thermodynamic analysis, we consider the Euclidean continuation of the solution, where the Hawking temperature reads

$$\begin{aligned} T &= \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{3r_+^4 + \ell^2(kr_+^2 - Q^2)}{4\pi r_+^3 \ell^2} \\ &= \frac{3r_+^2 + \ell^2(k - e^\gamma(\Phi_E^2 + \Phi_M^2))}{4\pi \ell^2 r_+}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

where

$$Q^2 \equiv e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2), \quad (2.32)$$

with a conjugate Bekenstein-Hawking entropy,

$$S = \frac{\text{Area}(\Gamma)}{4G} = \frac{\omega_k}{4G} r_+^2. \quad (2.33)$$

Using (2.26), we can check that the thermodynamic quantities satisfy the first law of black hole thermodynamics

$$dM = TdS + \Phi_E dQ_E + \Phi_M dQ_M + VdP, \quad (2.34)$$

where

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \left(\frac{\partial M}{\partial q_E} \right)_{q_M, \beta, P} = \frac{q_E}{r_+} e^{-\gamma}, \\ \Phi_M &= \left(\frac{\partial M}{\partial q_M} \right)_{q_E, \beta, P} = \frac{q_M}{r_+} e^{-\gamma},\end{aligned}\quad (2.35)$$

are the electric and magnetic potential differences between the black hole horizon and conformal infinity, respectively, and

$$P = \frac{3}{8\pi G \ell^2}, \quad V = \frac{1}{3} \omega_k r_+^3, \quad (2.36)$$

are, respectively, the vacuum pressure and thermodynamic volume [127]. The thermodynamic quantities also satisfy the Smarr relation,

$$M = 2TS - 2PV + \Phi_E Q_E + \Phi_M Q_M, \quad (2.37)$$

and its quadratic generalization

$$M^2 = \frac{S}{4\pi G} + \frac{\pi G Q^4}{4S} + \frac{Q^2}{2} + \frac{GS}{2\pi \ell^2} \left(Q^2 + \frac{S}{\pi G} + \frac{S^2}{2\pi^2 \ell^2} \right). \quad (2.38)$$

In the Euclidean regime, the renormalized action takes the form,

$$\begin{aligned}S_{\text{ren}}^E &= \frac{\beta \omega_k}{8\pi G} \left[m - \frac{r_+^3}{\ell^2} - \frac{e^{-\gamma}}{r_+} (q_E^2 - q_M^2) \right] \\ &= \beta(M - \Phi_E Q_E) - S,\end{aligned}\quad (2.39)$$

where $\beta = 1/T$ is the inverse of the Hawking temperature. We can identify the renormalized Euclidean action with the Gibbs potential as $S_{\text{ren}}^E = \beta \mathcal{G}$ as

$$\begin{aligned}E &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)_{Q_E, Q_M} - \frac{Q_E}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial Q_E} \right)_{\beta, Q_M} \right] S_{\text{ren}}^E = \frac{\omega_k m}{4\pi G} = M, \\ S &= \left[\beta \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)_{\beta, Q_M} - 1 \right] S_{\text{ren}}^E = \frac{\omega_k}{4G} r_+^2 = \frac{\text{Area}(\Gamma)}{4G}, \\ \Phi_E &= -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial S_{\text{ren}}^E}{\partial Q_E} \right)_{\beta, Q_M} = \frac{q_E}{r_+} e^{-\gamma}.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Notice that there is no need to add a term for the magnetic charge to relate the Euclidean on shell action with the Gibbs free energy, showing that the q_M is a constant external parameter of the dual theory.

The specific heat of the solution is

$$C_P = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{q_M, q_E, P} = \left[\frac{3r_+^4 + \ell^2(kr_+^2 - Q^2)}{3r_+^4 - \ell^2(kr_+^2 - 3Q^2)} \right] 2S, \quad (2.41)$$

which is always positive for positive temperature, i.e., $C_P(T \geq 0) \geq 0$, and the solution is thermodynamically

stable and can always reach thermal equilibrium with a heat bath.

We can also study the canonical ensemble by coupling the system to energy and charge reservoirs at fixed temperature and the intensive variable (the electric potential). Then, the thermodynamic potential is the Helmholtz free energy $\mathcal{F}$. In this case, we need to add a boundary term with a well-posed variational principle, as we are now fixing the gauge curvature rather than the potential [128]. We find that the term is proportional to the Hawking-Ross term generalized to NLE [129] such that

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\text{ren}}^E &= S_{\text{ren}}^E - \frac{1}{4\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} n_\mu \left(\mathcal{L}_S F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_P \epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right) A_\nu \\ &= \frac{\beta \omega_k}{16\pi G} \left[kr_+ - \frac{r_+^3}{\ell^2} + 3 \frac{e^{-\gamma} (q_E^2 + q_M^2)}{r_+} \right] \\ &= \beta M - S = \beta \mathcal{F}\end{aligned}\quad (2.42)$$

is a well-defined action in the canonical ensemble and can be associated with the Helmholtz free energy that shows a swallowtail (see Fig. 1 for an example) that appears in classical catastrophe theory, just as for AdS-Reissner-Nordström black holes [130].

An interesting process in classical thermodynamics is the so-called Joule-Thomson (JT) expansion [131] that has been studied in various black hole solutions [132–136]. The JT effect is an isenthalpic process in which temperature change is produced when a gas is allowed to expand from a

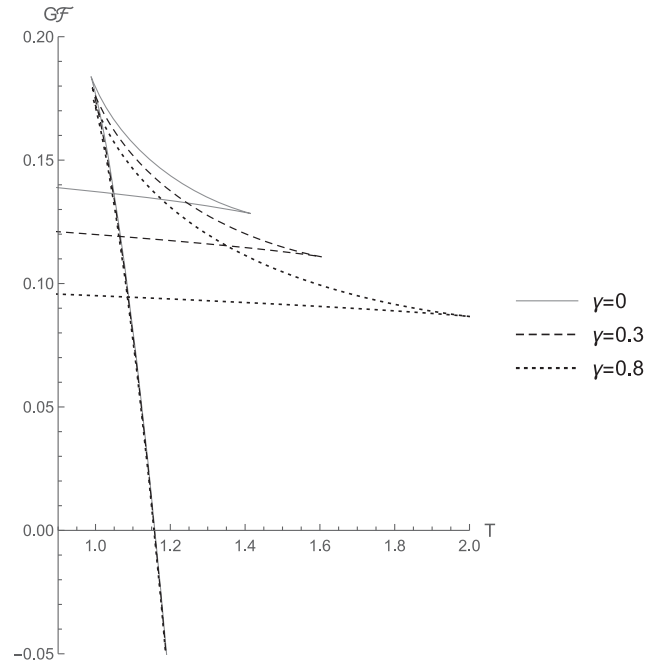


FIG. 1. Free energy $G\mathcal{F}$ as a function of temperature for the black hole solution with $k = 1, \ell = \sqrt{3}$, $e^\gamma Q^2 = q_E^2 + q_M^2 = 1.125 \times 10^{-2}$.

high-pressure region to a low-pressure region, through a valve or porous plugs. As a result, it is possible to obtain heating or cooling effects due to this process, where both are controlled by an inversion point characterized by the so-called JT coefficient. This inversion point is defined as the point where the inversion curves intersect the isenthalpic curves in the T - P plane. The change of temperature with respect to pressure can be described by the JT coefficient defined as [137]

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_P} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right]. \quad (2.43)$$

The μ_{JT} sign determines whether heating or cooling will occur. In the JT expansion, the pressure change is negative, but the temperature change can be positive or negative. For $\mu_{JT} > 0$, one has the cooling region in the T - P plane, whereas $\mu_{JT} < 0$ determines the heating region in the T - P plane. Replacing the thermodynamic quantities into Eq. (2.43) one finds

$$\mu_{JT} = \left(\frac{8\pi G P r_+^4 + 2k r_+^2 - 3Q^2}{8\pi G P r_+^4 + k r_+^2 - Q^2} \right) \frac{V}{S}. \quad (2.44)$$

By setting $\mu_{JT} = 0$, we can define the inversion pressure, P_i , which is the specific point in the black hole's pressure gradient where the system transitions from cooling (or heating) to heating (or cooling). Substituting this condition into Eq. (2.31) for the corresponding inversion temperature T_i , we obtain the following equation for the inversion curves

$$T_i = \sqrt{\frac{G P_i}{2\pi} \frac{16\pi G P_i Q^2 - k \sqrt{k^2 + 24\pi G P_i Q^2} + k^2}{(\sqrt{k^2 + 24\pi G P_i Q^2} - k)^{3/2}}}. \quad (2.45)$$

Now, we can plot isenthalpic curves in the T - P plane. The event horizon can be determined using Eq. (2.8), and this

result can be substituted into Eq. (2.31) to yield the isenthalpic curves in the T - P plane. Considering the black hole's mass as equivalent to the enthalpy in the extended phase space [127], the isenthalpic curves for various mass values are plotted in Fig. 2. The inversion curve intersects the maximum points of the isenthalpic curves, dividing them into cooling and heating regions. For $P < P_i$, the slope of the isenthalpic curve is positive, indicating cooling during expansion. Conversely, for $P > P_i$, the slope becomes negative beneath the inversion curve, signifying heating. Notice that if one considers the large- γ regime, the JT coefficient (2.44) and inversion curves (2.45) become constants, implying the absence of a transition point. That is, the isenthalpic curves no longer intersect the inversion curves, and no JT effect occurs in this limit, mirroring the behavior of the AdS-Schwarzschild solution.

We observe that these solutions are thermodynamically equivalent to AdS black holes charged under Maxwell electrodynamics coupled to the Einstein-Hilbert action. This equivalence arises not only because the black hole solutions (2.8) are isometric to AdS-Reissner-Nordström topological black holes with charges being screened by the deformation parameter γ , but also due to the existence of an on shell relation at the level of the free energy as well. For this configuration, the scalar $\mathcal{S}$ and the pseudoscalar $\mathcal{P}$ are given by

$$\mathcal{S} = \frac{q_M^2 - e^{-2\gamma} q_E^2}{r^4}, \quad \mathcal{P} = \frac{2e^{-\gamma} q_E q_M}{r^4}, \quad (2.46)$$

revealing that both quantities are proportional. This implies that the ModMax Lagrangian (2.3) can be recast as

$$S_{MM} = -\frac{1}{8\pi G_{\text{eff}}} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{S}, \quad (2.47)$$

which corresponds to pure Maxwell theory and

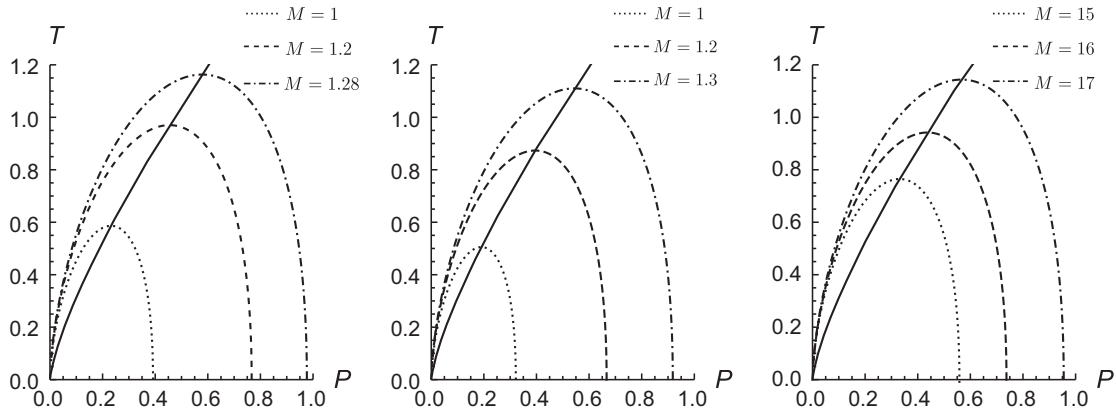


FIG. 2. The solid curves represent inversion curves with $Q = 5$, while the isenthalpic curves are shown in dotted, dashed, and dot-dashed for different values of M . The left, center, and right plots correspond, respectively, to $k = -1, 0, 1$.

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{\cosh \gamma - \left(\frac{e^{2\gamma} q_E^2 + q_M^2}{e^{2\gamma} q_E^2 - q_M^2} \right) \sinh \gamma}, \quad (2.48)$$

defines an effective Newton's constant parametrized by the deformation parameter and charges. In this setup, the theory is on shell equivalent to pure Maxwell theory. This equivalence holds for all configurations where either $\mathcal{P}$ is proportional to $\mathcal{S}$ or for solutions without magnetic charges. Consequently, the geometric and holographic properties of such solutions are identical to those of pure Maxwell theory, and the nonlinear effects of ModMax theory remain invisible. To probe these nonlinearities, we introduce nontrivial bulk perturbations that break this on shell equivalence. These perturbations source time-dependent operators in the dual field theory, allowing us to compute linear response functions and extract transport coefficients that now encode the nonlinear structure of ModMax theory.

III. HOLOGRAPHIC TRANSPORT COEFFICIENTS

In this section, we compute the magnetotransport of the holographic ModMax theory by analyzing linear perturbations around a charged black hole background with an $\mathbb{R}^2$ horizon topology. We first introduce isotropic fluctuations of the gauge and metric fields and employ Kubo formulas in the hydrodynamic limit to derive the conductivities in terms of retarded Green's functions evaluated in a thermal equilibrium state. Next, we break translational symmetry in the transverse spatial directions by introducing scalar fields, which induce momentum relaxation and allow for a finite DC conductivity. By perturbing all dynamical fields, we analytically determine the full set of transport coefficients—particularly the Hall angle and the Nernst signal—in terms of horizon data, thereby capturing the nonlinear effects of ModMax electrodynamics.

A. Linear response induced by isotropic fluctuations

To ensure spatial translational invariance, introduce a uniform transverse magnetic field, and meaningfully describe Hall effects in the boundary theory, we consider the planar dyonic black hole solution ($k = 0$). We perform the following coordinate transformation:

$$r = \frac{\ell^2}{z}, \quad x^a = \frac{X^{\hat{a}}}{\ell}, \quad (3.1)$$

with $x^{\hat{a}} = (x, y)$ and $X^{\hat{a}} = (X, Y)$, which brings the metric into the form

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} \left(-h(z) dt^2 + \frac{dz^2}{h(z)} + dX^2 + dY^2 \right), \quad (3.2)$$

where the blackening function reads

$$h(z) = 1 - \tilde{m} z^3 + \tilde{Q}^2 z^4, \quad \tilde{m} \equiv \frac{2m}{\ell^2}, \quad \tilde{Q}^2 \equiv \frac{Q^2}{\ell^6}. \quad (3.3)$$

Following [6,92], for the sake of simplicity, we place the black hole horizon at $z = 1$ by fixing the mass parameter as $\tilde{m} = 1 + \tilde{Q}^2$, and then, we introduce isotropic, time-dependent fluctuations to the gauge and metric fields,

$$\begin{aligned} \delta A_{\hat{a}} &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \delta a_{\hat{a}}(z) e^{-i\omega t}, \\ \delta h_{i\hat{a}} &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \delta h_{i\hat{a}}(z) z^{-2} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

which reduces the linearized field equations to the following system:

$$\begin{aligned} 4Q^2 z^3 [q_E h \delta a'_X - e^\gamma q_M (i\omega \delta a_Y + q_M \delta h_{tX})] + (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) (z h \delta h''_{tX} - 2h \delta h'_{tX}) &= 0, \\ 4Q^2 z^3 [q_E h \delta a'_Y - e^\gamma q_M (i\omega \delta a_X + q_M \delta h_{tY})] + (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) (z h \delta h''_{tY} - 2h \delta h'_{tY}) &= 0, \\ 4Q^2 z^2 (i q_E \omega \delta a_Y + q_E q_M \delta h_{tX} + e^\gamma q_M h \delta a'_X) + i\omega (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \delta h'_{tY} &= 0, \\ 4Q^2 z^2 (i q_E \omega \delta a_X - q_E q_M \delta h_{tY} - e^\gamma q_M h \delta a'_Y) + i\omega (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \delta h'_{tX} &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

where, for simplicity, we have set $\ell = 1$ throughout this analysis and primes denote partial differentiation with respect to the holographic coordinate z .

To solve the system of perturbation equations, we impose ingoing wave boundary conditions at the horizon, requiring the fields to behave as

$$\delta a_{\hat{a}} \sim a_{\hat{a}}(z) h(z)^{\frac{i\omega}{4\pi T}}, \quad \delta h_{i\hat{a}} \sim h_{\hat{a}}(z) h(z)^{1 + \frac{i\omega}{4\pi T}}, \quad (3.6)$$

with $T = h'(1)/4\pi$ the black hole Hawking temperature.

We then perform a hydrodynamic expansion in small frequency $\omega \rightarrow 0$ near the boundary, expanding the radial profiles as

$$\begin{aligned} a_{\hat{a}}(z) &= A_{\hat{a}0} + \omega A_{\hat{a}1} + \omega^2 A_{\hat{a}2} + \dots, \\ h_{\hat{a}}(z) &= H_{\hat{a}0} + \omega H_{\hat{a}1} + \omega^2 H_{\hat{a}2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.7)$$

and match the asymptotic behavior with the near-horizon expansion. Solving the equations order-by-order in ω , we obtain at leading order the system,

$$\begin{aligned} q_E H_{\hat{a}0} + e^\gamma A'_{\hat{a}0} &= 0, \\ 2e^{-\gamma} [Q^2 z^4 + e^\gamma (2h - 3)] H'_{\hat{a}0} + z h H''_{\hat{a}0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

whose general solution is given by

$$\begin{aligned} H_{\hat{a}0} &= \gamma_{\hat{a}}, \\ A_{\hat{a}0} &= \alpha_{\hat{a}} - q_E e^{-\gamma} \gamma_{\hat{a}} z, \end{aligned} \quad (3.9)$$

with $\gamma_{\hat{a}}$ and $\alpha_{\hat{a}}$ integration constants. At the next order in the hydrodynamic expansion, the system reads,

$$\begin{aligned} H''_{\hat{a}1} + 2H'_{\hat{a}1} \partial_z \log \psi &= C_{H\hat{a}}, \\ A'_{\hat{a}1} + q_E e^{-\gamma} H_{\hat{a}1} &= C_{A\hat{a}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

where $\psi \equiv z^{-1}h(z)$, and $C_{H\hat{a}}$ and $C_{A\hat{a}}$ are functions that depend on the zeroth-order solutions, and are given in the Appendix. A first integral for the equations for $H_{\hat{a}1}$ is

$$H'_{\hat{a}1} = \frac{C_{\hat{a}}}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^2} \int_0^z du C_{H\hat{a}}(u) \psi(u)^2, \quad (3.11)$$

where the constants $C_{\hat{a}}$ are fixed by imposing regularity at the horizon, and the coefficients $\alpha_{\hat{a}}$ can be written as functions of $\gamma_{\hat{a}}$, as shown in the Appendix. Integrating once more, we find

$$\begin{aligned} H_{\hat{a}1} &= \gamma_{\hat{a}} - i \int_0^z du \gamma_{\hat{a}} P_{\hat{a}}(u), \\ A_{\hat{a}1} &= \alpha_{\hat{a}} - q_E e^{-\gamma} \int_0^z du \left[H_{\hat{a}1}(u) - i \left(\frac{\gamma_x Q_{\hat{a}}(u) + \gamma_y R_{\hat{a}}(u)}{h(z)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

where the functions $P_{\hat{a}}$, $Q_{\hat{a}}$, and $R_{\hat{a}}$ can be found in the Appendix. We do not proceed further in the boundary expansion as we take the hydrodynamic limit. Instead, we directly relate the boundary data to the integration constants.

To this end, we use the z -independent solutions of the field equations and introduce two additional constants, $\delta_{\hat{a}}$, ensuring a total of four integration constants that fully account for the four boundary data $H_{\hat{a}0}$ and $A_{\hat{a}0}$ such that

$$\begin{aligned} \delta h_{\hat{a}}^0 &= -i\omega \delta_{\hat{a}}(\omega) q_M^{-1} + \gamma_{\hat{a}}(\omega), \\ \delta a_{\hat{a}}^0 &= \delta_{\hat{a}}(\omega) + \alpha_{\hat{a}}(\omega). \end{aligned} \quad (3.13)$$

In the hydrodynamic expansion, it suffices to determine up to the linear order in the fluctuations. Then, the solutions read,

$$\begin{aligned} \delta a_X &= \delta_X + h^{\frac{i\omega}{4\pi T}} \left\{ \alpha_X - \gamma_X e^{-\gamma} q_E \left[z - i\omega \int_0^z du \left(\frac{P_X(u)}{\psi^2(u)} (z-u) + \frac{\gamma_X Q_X + \gamma_Y R_X(u)}{h} \right) \right] \right\}, \\ \delta a_Y &= \delta_Y + h^{\frac{i\omega}{4\pi T}} \left\{ \alpha_Y - \gamma_Y e^{-\gamma} q_E \left[z - i\omega \int_0^z du \left(\frac{P_Y(u)}{\psi^2(u)} (z-u) + \frac{\gamma_X Q_Y + \gamma_Y R_Y(u)}{h} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

for the gauge-field perturbations, and

$$\begin{aligned} \delta h_{tX}(\omega, z) &= -\frac{i\omega}{q_M} \delta_Y + h^{1+\frac{i\omega}{4\pi T}} \left[\delta h_X^0 + \frac{i\omega}{q_M} \delta_Y - i\omega \delta h_X^0 \int_0^z du \frac{P_X(u)}{\psi^2(u)} \right], \\ \delta h_{tY}(\omega, z) &= \frac{i\omega}{q_M} \delta_X + h^{1+\frac{i\omega}{4\pi T}} \left[\delta h_Y^0 + \frac{i\omega}{q_M} \delta_X - i\omega \delta h_Y^0 \int_0^z du \frac{P_Y(u)}{\psi^2(u)} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

for the metric perturbations.

We now evaluate the on shell action (2.1) to second order in perturbations. Substituting the previously derived solutions, the action is expressed entirely in terms of boundary data. Functional differentiation with respect to the sources then yields the linear response functions. In what follows, we focus on the current-current correlator, which captures the modifications to the system's electrical response induced by the nonlinear corrections to Maxwell theory. The retarded Green's function is given by

$$\begin{aligned} G_{J_{\hat{a}} J_{\hat{b}}}^R(\omega) &= -i \int d^2x dt e^{i\omega t} \theta(t) \langle [J_{\hat{a}}(t), J_{\hat{b}}(0)] \rangle \\ &= -i\omega \frac{q_E (q_E^2 + q_M^2)}{q_M (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \kappa} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

with $\epsilon_{XY} = -\epsilon_{YX} = 1$ the antisymmetric tensor and $\kappa \equiv 8\pi G$. Applying the Kubo formula, we extract the electrical conductivity in thermal equilibrium from the retarded current-current correlator,

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{a}\hat{b}} &= -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(G_{J_{\hat{a}}J_{\hat{b}}}^R(\omega))}{\omega} = \frac{q_E(q_E^2 + q_M^2)}{q_M(q_E^2 + e^{2\gamma}q_M^2)\kappa} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}} \\ &= \frac{\rho(B^2 + \kappa^2\rho^2)}{B(B^2 e^{2\gamma} + \kappa^2\rho^2)} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}},\end{aligned}\quad (3.17)$$

where $\rho = q_E/\kappa$ is the electric charge density and $B = q_M$ the magnetic field. Notice that the electrical conductivity is finite at zero temperature, indicating a metallic behavior. From this expression, we observe that in the limit $\gamma \rightarrow 0$, one finds

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_{\hat{a}\hat{b}} = \epsilon_{\hat{a}\hat{b}} \frac{\rho}{B}, \quad (3.18)$$

recovering the result found in [6] for pure Maxwell theory. As in the standard Maxwell case, the electrical conductivity matrix in ModMax theory exhibits no diagonal components, indicating the absence of longitudinal conductivity. Instead, only the Hall conductivity is present, and the Hall angle asymptotes $\theta_H \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, characteristic of a perfect Hall state (i.e., dissipationless transport) in the dual field theory.

Moreover, the nonvanishing components of the conductivity matrix become exponentially suppressed as γ increases, indicating a transition to a perfect insulating phase in the large- γ regime. In this limit, the bulk geometry reduces to the AdS planar Schwarzschild black hole, while

the gauge field becomes a purely magnetic stealth configuration. Surprisingly, in contrast to standard AdS-Schwarzschild black holes—which are known to exhibit nonvanishing holographic electrical conductivity (see, e.g., [138])—the solution considered here behaves as a perfect insulator under isotropic perturbations.

We now proceed to compute the remaining magneto-transport properties, beginning with the retarded Green's function associated with the momentum density-current correlator

$$\begin{aligned}G_{J_{\hat{a}}T_{\hat{b}}}^R(\omega) &= -i \int d^2x dt e^{i\omega t} \theta(t) \langle [J_{\hat{a}}(t), T_{\hat{b}}(0)] \rangle \\ &= i\omega \frac{3(1 + e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2))}{4q_M\kappa} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}},\end{aligned}\quad (3.19)$$

and we find the thermoelectric conductivity matrix through Kubo's formula, i.e.,

$$\alpha_{\hat{a}\hat{b}} = -\frac{1}{T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im} G_{J_{\hat{a}}T_{\hat{b}}}^R(\omega)}{\omega} = -\frac{3(1 + e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2))}{4q_M\kappa T} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (3.20)$$

Next, we consider the momentum-momentum density correlator,

$$\begin{aligned}G_{T_{\hat{a}}T_{\hat{b}}}^R(\omega) &= -i \int d^2x dt e^{i\omega t} \theta(t) \langle [T_{\hat{a}}(t), T_{\hat{b}}(0)] \rangle \\ &= i\omega \frac{2e^{-\gamma}(-3e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)^2}{(q_E^2 + q_M^2)\kappa} \delta_{\hat{a}\hat{b}} - i\omega \frac{9e^{-2\gamma}q_E(e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)^2}{q_M(q_E^2 + q_M^2)\kappa} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Applying Kubo's formula once more, we obtain the thermal conductivity matrix,

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_{\hat{a}\hat{b}} &= -\frac{1}{T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im} G_{T_{\hat{a}}T_{\hat{b}}}^R(\omega)}{\omega} \\ &= \delta_{\hat{a}\hat{b}} \frac{2e^{-\gamma}(3e^\gamma - q_E^2 - q_M^2)^2}{(q_E^2 + q_M^2)\kappa T} \\ &\quad + \epsilon_{\hat{a}\hat{b}} \frac{9e^{-2\gamma}q_E(e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)^2}{q_M(q_E^2 + q_M^2)\kappa T},\end{aligned}\quad (3.22)$$

which domain the thermal transport in the absence of electromagnetic fields.

In the limit $\gamma \rightarrow 0$, we recover full agreement with the standard Maxwell case [6]. Interestingly, in the opposite limit $\gamma \rightarrow \infty$, the system exhibits nontrivial thermoelectric holographic conductivities and a divergent thermal conductivity. This behavior leads to dispersionless momentum

transport in the uncharged black hole with the previously discussed magnetic stealth charge configuration.

As a final remark, when analyzing systems in the presence of a magnetic background, it is important to subtract the contributions from magnetization currents [8,105]. To account for this, we define the magnetization and energy magnetization as follows:

$$\hat{M} = -\frac{\partial S_{\text{ren}}}{\partial B}, \quad \hat{M}_E = -\frac{\partial S_{\text{ren}}}{\partial B_E}, \quad (3.23)$$

where B and B_E are determined from the asymptotic form of the perturbations. Specifically, in this case

$$\begin{aligned}\delta A_Y &\rightarrow XB \quad \text{as } z \rightarrow 0, \\ \delta h_{tY} &\rightarrow XB_E \quad \text{as } z \rightarrow 0,\end{aligned}\quad (3.24)$$

with $B = q_M$ and B_E a constant. By imposing these boundary conditions, truncating the perturbative solutions

accordingly, and substituting into the expressions for the magnetizations, we obtain

$$\hat{M} = \frac{B}{2\kappa} e^{-\gamma}, \quad \hat{M}_E = \frac{1}{2} \mu \hat{M}, \quad (3.25)$$

where the chemical potential is given by $\mu = -e^{-\gamma} q_E$, such that $\alpha_{\hat{a}\hat{b}} \rightarrow \alpha_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{\hat{M}}{T} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}$ and $\bar{\kappa}_{\hat{a}\hat{b}} \rightarrow \bar{\kappa}_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{2(\hat{M}_E - \mu \hat{M})}{T} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}$. Then, the corrected thermoelectric and thermal conductivity matrices are given by

$$\begin{aligned} \alpha_{\hat{a}\hat{b}} &= -\frac{q_M e^{-\gamma}}{2\kappa T} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{e^\gamma + q_E^2 + q_M^2}{q_M^2} \right) \right] \epsilon_{\hat{a}\hat{b}}, \\ \bar{\kappa}_{\hat{a}\hat{b}} &= \frac{1}{\kappa T} \left[-\frac{2e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma)^2}{q_E^2 + q_M^2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2\gamma} q_E}{2q_M} \left(\frac{18(e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)^2}{q_E^2 + q_M^2} + q_M^2 \right) \epsilon_{\hat{a}\hat{b}} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

As observed, the conductivity matrix is symmetric and finite, but the electric conductivity exhibits only transverse Hall components. To construct a more realistic dual model, it is necessary to break translational invariance, which also introduces longitudinal components. This can be achieved by introducing transverse scalar fields, as proposed in [43], which induce momentum relaxation and effectively incorporate latticelike effects in the boundary theory.⁵ In order to have analytic expressions for the DC conductivities, we employ the method developed in [138], which allows for the computation of magnetotransport coefficients purely in terms of horizon data. In the following subsection, we introduce scalar fields with a linear transverse profile to explicitly break translational invariance, thereby generating nontrivial Hall and Nernst effects.

B. Hall and Nernst effects in the presence of momentum relaxation

As aforementioned, the conductivity matrix (3.18) is finite, with only the off-diagonal components being non-zero, indicating that the system realizes a perfect Hall state. To move beyond this regime, we introduce scalar fields that explicitly break translational symmetry, following the approach of [43]. The inclusion of scalar operators corresponds in the dual theory to introducing an external relevant perturbation that makes the conformal field theory massive depending on the scalar boundary conditions [139,140], which, in this case, the modification enables momentum relaxation and leads to a richer transport structure.

The analysis of DC transport is carried out using the method introduced in [138], which allows for an analytic computation of the DC conductivities in terms of horizon

⁵Similarly, a holographic Q -lattice was constructed in [42] using a scalar field with a plane-wave profile.

data by constructing electric $J^{\hat{a}}$ and heat $Q^{\hat{a}}$ conserved currents which at linear order satisfy a generalized Ohm's law.

Let us consider the action,⁶

$$S_{\text{ren}}^A = S_{\text{ren}} + S_A, \quad (3.27)$$

where S_{ren} is given in (2.1) and

$$S_A = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta^{\hat{a}\hat{b}} \partial_\mu \psi_{\hat{a}} \partial_\nu \psi_{\hat{b}}, \quad (3.28)$$

with $\psi_{\hat{a}} = (\psi_x, \psi_y)$ denoting the scalar fields. The equations of motion for the metric and gauge fields remain the same as in the system described in (2.5), but now the scalars satisfy the massless wave equation,

$$\square \psi_{\hat{a}} = 0, \quad (3.29)$$

and the Einstein equations now become

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{3}{\ell^2} g_{\mu\nu} \\ = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\partial_\mu \psi_{\hat{a}} \partial_\nu \psi_{\hat{b}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi_{\hat{a}} \partial^\alpha \psi_{\hat{b}} \right) \delta^{\hat{a}\hat{b}} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

where $T_{\mu\nu}$ is defined in (2.7).

Assuming scalar fields with transverse linear profile, i.e.,

$$\psi_{\hat{a}} = \alpha x_{\hat{a}}, \quad (3.31)$$

the line element (2.8) with $k = 0$ is still a solution of the new system, but now the blackening function becomes

$$f(r) = \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{2} \alpha^2. \quad (3.32)$$

We now examine small perturbations of the fields, expressed as

$$\begin{aligned} g_{t\hat{a}} &= r^2 \epsilon H_{t\hat{a}}(r), \quad g_{r\hat{a}} = r^2 \epsilon H_{r\hat{a}}(r), \\ A_{\hat{a}} &= \epsilon (a_{\hat{a}}(r) - E_{\hat{a}} t), \quad \psi_{\hat{a}} = \alpha x_{\hat{a}} + \epsilon \alpha^{-1} \chi_{\hat{a}}(r), \end{aligned} \quad (3.33)$$

⁶We do not include boundary terms for the scalar fields, as we consider scalars with a linear transverse profile that does not introduce additional divergences in the on shell action. This setup suffices for computing the DC conductivities via the method of evaluating conserved currents at the horizon, as described in [138]. However, when constructing the optical conductivities or transport coefficients in the hydrodynamic limit, as discussed in Sec. III A, the perturbations generate new divergences that must be renormalized. The holographic renormalization of scalar fields coupled to gravity—under various boundary conditions—has been thoroughly analyzed in [140–142].

where $a_{\hat{a}}$, $H_{i\hat{a}}$, and $\chi_{\hat{a}}$ are independent fluctuation fields and ϵ is an infinitesimal perturbation parameter. The ModMax equations define a conserved current along the holographic radial direction, i.e., $\partial_r J_{\hat{a}} = 0$, whose linearization around (3.33) leads to the nontrivial components,

$$J_{\hat{a}} = \frac{e^\gamma(q_E^2 + q_M^2)}{q_E^2 + e^{2\gamma}q_M^2} (fa'_{\hat{a}} + e^{-\gamma}q_E H_{i\hat{a}} + q_M f\epsilon_{\hat{a}}^{\hat{b}} H_{r\hat{b}}). \quad (3.34)$$

To ensure regularity of the fluctuations, appropriate boundary conditions must be imposed both at the horizon and at asymptotic infinity. It is convenient to work in Eddington-Finkelstein coordinates (v, r) where

$$v = t + \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.35)$$

which leads to the perturbed metric

$$ds^2 = -f dv^2 + 2dvdr + r^2 \delta_{\hat{a}\hat{b}} dx^{\hat{a}} dx^{\hat{b}} + \epsilon \left(H_{i\hat{a}} dv - \frac{H_{i\hat{a}}}{f} dr + H_{r\hat{a}} dr \right) dx^{\hat{a}}, \quad (3.36)$$

where we impose

$$H_{i\hat{a}} = f H_{r\hat{a}}, \quad (3.37)$$

and

$$a_{\hat{a}} = -E_{\hat{a}} \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.38)$$

in order to ensure regularity of the metric and gauge field perturbations throughout the spacetime.

Solving the Einstein field equations on this perturbed background, we find that the metric perturbations at the horizon radius r_+ read,

$$\begin{aligned} H_{tx} &= -\frac{4e^\gamma(q_E^2 + q_M^2)(E_x e^{-\gamma} q_E r_+^2 \alpha^2 + q_M E_y (4e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2) + r_+^2 \alpha^2))}{16q_E^4 q_M^2 + (4q_M^3 + e^\gamma q_M r_+^2 \alpha^2)^2 + q_E^2 (32q_M^4 + 8e^\gamma q_M^2 r_+^2 \alpha^2 + r_+^4 \alpha^4)}, \\ H_{ty} &= -\frac{4e^\gamma(q_E^2 + q_M^2)(E_y e^{-\gamma} q_E r_+^2 \alpha^2 - q_M E_x (4e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2) + r_+^2 \alpha^2))}{16q_E^4 q_M^2 + (4q_M^3 + e^\gamma q_M r_+^2 \alpha^2)^2 + q_E^2 (32q_M^4 + 8e^\gamma q_M^2 r_+^2 \alpha^2 + r_+^4 \alpha^4)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Thus, by substituting this expression into (3.34), we find that the conductivity matrix,

$$\sigma_{\hat{a}\hat{b}} \equiv \frac{\partial J_{\hat{b}}}{\partial E^{\hat{a}}}, \quad E^{\hat{a}} \equiv (E_x, E_y), \quad (3.40)$$

is given by

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{r_+^2 \alpha^2 e^\gamma (q_E^2 + q_M^2) (4e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2) + r_+^2 \alpha^2)}{\alpha^2 r_+^2 [\alpha^2 r_+^2 (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) + 8e^\gamma q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)] + 16q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)^2}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{8q_E q_M e^\gamma (q_E^2 + q_M^2)^2 (2e^{-\gamma}(q_E^2 + q_M^2) + r_+^2 \alpha^2)}{(q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) (\alpha^2 r_+^2 [\alpha^2 r_+^2 (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) + 8e^\gamma q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)] + 16q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)^2)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

and

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xx}. \quad (3.42)$$

We observe that the conductivity matrix reduces to (3.18) when $\alpha = 0$, and to the result corresponding to pure Maxwell theory (cf. [25,138]) when $\gamma = 0$. Notably, the deformation parameter γ does not affect the anomalous temperature dependence of the transport coefficients, implying that the dual metals retain the same thermodynamic behavior as those described by Maxwell theory coupled to AdS gravity. However, γ does modify the numerical values of the coefficients, introducing new

regimes that allow for the exploration of exotic quantum phases governed by the ModMax deformations.

We can now compute the Hall angle, defined by

$$\theta_H = \arctan\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right), \quad (3.43)$$

which describes the deflection of charge carriers due to a magnetic field. We find

$$\tan \theta_H = \frac{8q_E q_M (q_E^2 + q_M^2)}{(q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \alpha^2 r_+^2} \left[\frac{2(q_E^2 + q_M^2) + e^\gamma \alpha^2 r_+^2}{4(q_E^2 + q_M^2) + e^\gamma \alpha^2 r_+^2} \right]. \quad (3.44)$$

Notice that the expression inside the square brackets in (3.44) is bounded between zero and one. Therefore, the leading behavior of the Hall angle is governed by

$$\tan \theta_H \sim \frac{8q_E q_M (q_E^2 + q_M^2)}{(q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \alpha^2 r_+^2}, \quad (3.45)$$

which, in the low-temperature regime, scales as the square of the inverse of the temperature, $\tan \theta_H \sim T^{-2}$, which is the anomalous temperature dependence of the Hall angle of cuprate strange metals [107,108]. Nonetheless, our model yields a conductivity matrix with the same temperature scaling as in pure Maxwell theory, with the deformation parameter merely shifting its numerical values. In contrast, strange metals display, in addition to this scaling of the Hall angle, an anomalous behavior in the longitudinal resistivity, which becomes linear in temperature. To reconcile these two features within a holographic framework, [93] argues that one must include an additional contribution to the conductivity matrix that affects the longitudinal resistivity but leaves the Hall angle unchanged.

Furthermore, in the limit $\gamma \rightarrow \infty$, the Hall angle vanishes for all values of temperature, electric and magnetic charges, and scalar intensity α . This implies that the electric current flows strictly parallel to the applied electric field, with no transverse deflection, indicating the absence of Hall

response despite the presence of a magnetic charge in the boundary. The system thus exhibits purely Ohmic behavior, with no transverse forces acting on the charge carriers. As shown in Fig. 3, the Hall angle depends nonlinearly on the ModMax parameter. Notably, in the small- γ regime, a perfect Hall state can also be realized for small values of the charges.

To compute the thermoelectric conductivity matrices $\alpha_{\hat{a}\hat{b}}$ and $\bar{\alpha}_{\hat{a}\hat{b}}$, we follow the holographic framework of [138] where a conserved heat current is constructed from the holographic stress tensor and the electric current as

$$Q^{\hat{a}} = T^{\hat{r}\hat{a}} - \mu J^{\hat{a}}, \quad (3.46)$$

which in our model reduces to

$$Q_{\hat{a}} = f^2 \partial_r H_{r\hat{a}} - A_r J_{\hat{a}} = -4\pi T H_{t\hat{a}}(r_+), \quad (3.47)$$

where in the last equality we have used the fact that the current is conserved along the holographic coordinate and evaluated it at $r = r_+$. Then the thermoelectric conductivities,

$$\bar{\alpha}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{T} \frac{\partial Q_{\hat{b}}}{\partial E^{\hat{a}}}, \quad (3.48)$$

are

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{xx} &= \frac{16\pi\alpha^2 e^{-2\gamma} (q_E^2 + q_M^2) q_E r_+^2}{\alpha^2 r_+ [\alpha^2 r_+ (q_E^2 r_+^2 + e^{2\gamma} q_M^2) + 8e^\gamma q_M (q_E^2 r_+ + q_M^3)] + 16q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)^2}, \\ \bar{\alpha}_{xy} &= \frac{16\pi e^{-\gamma} (q_E^2 + q_M^2) q_M^2 [\alpha^2 r_+ + 4(q_E^2 + q_M^2)]}{\alpha^2 r_+ [\alpha^2 r_+ (q_E^2 r_+^2 + e^{2\gamma} q_M^2) + 8e^\gamma q_M (q_E^2 r_+ + q_M^3)] + 16q_M^2 (q_E^2 + q_M^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

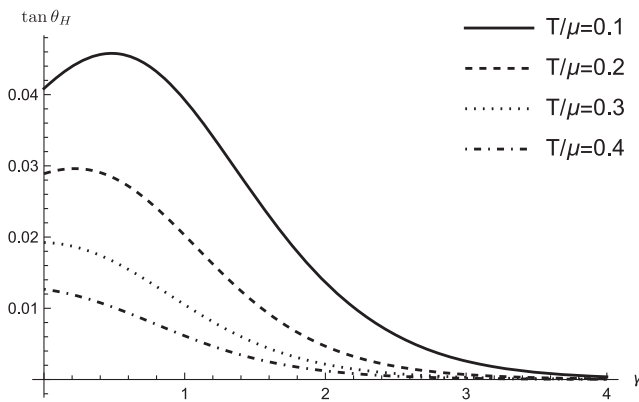


FIG. 3. The tangent of the Hall angle as a function of the ModMax deformation parameter γ , shown for various values of the normalized temperature T/μ , with the scalar intensity fixed at $\alpha = 10$, the electromagnetic charges at $q_E = 1$, $q_M = 0.5$, and the AdS radius at $\ell = 1$ for all curves.

together with

$$\bar{\alpha}_{xy} = -\alpha_{xy}, \quad \bar{\alpha}_{yy} = \alpha_{xx}, \quad (3.50)$$

where we have already subtracted the magnetization effects as explained below (3.25). We also obtain $\alpha_{\hat{a}\hat{b}}$ using the perturbations,

$$\begin{aligned} g_{t\hat{a}} &= -tf\zeta_{\hat{a}} + \epsilon H_{t\hat{a}}, & g_{r\hat{a}} &= r^2 \epsilon H_{r\hat{a}}, \\ A_{\hat{a}} &= -tE_{\hat{a}} + \zeta_{\hat{a}} \epsilon a(r), & \psi_{\hat{a}} &= \alpha x_{\hat{a}} + \epsilon \alpha^{-1} \chi_{\hat{a}}(r), \end{aligned} \quad (3.51)$$

where the linear in time perturbations comprise the only holographic sources at the boundary and $\zeta_{\hat{a}}$ can be identified with the temperature gradient that sources the heat current [138]. Repeating the same procedure as before, we find that the thermoelectric conductivity,

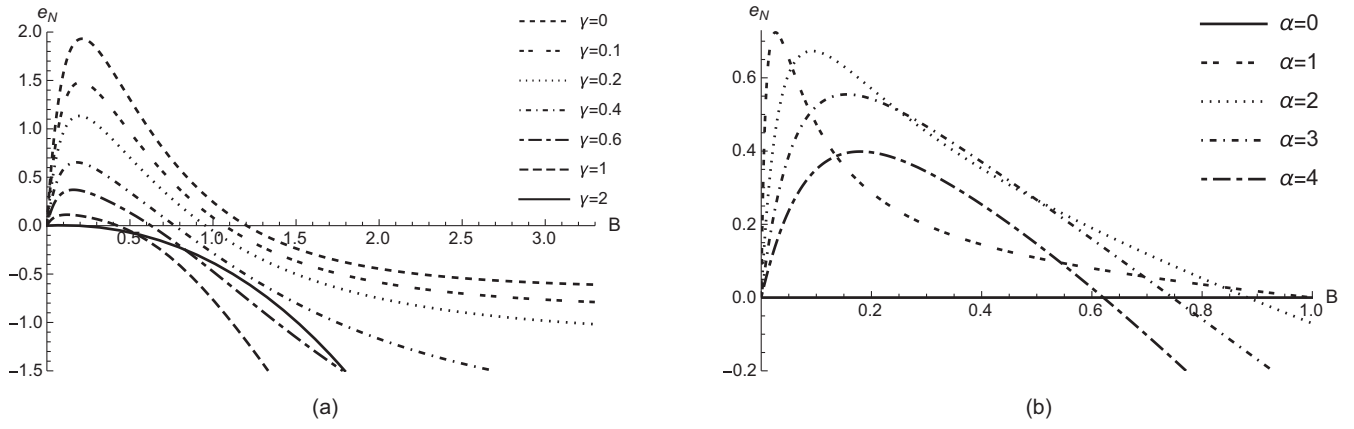


FIG. 4. Nernst signal as a function of the magnetic field for various values of the bulk parameters. (a) The Nernst signal in terms of the magnetic field for different values of the ModMax parameter and $T = 0.5$, $q_E = 1.5$, $\alpha = 3.5$, $\ell = 1$. (b) The Nernst signal in terms of the magnetic field for different values of the scalar intensity α with $T = 0.5$, $q_E = 1.5$, $\gamma = 0.5$, $\ell = 1$.

$$\alpha_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{T} \frac{\partial J_{\hat{b}}}{\partial \zeta^{\hat{a}}}, \quad (3.52)$$

satisfies $\alpha_{\hat{a}\hat{b}} = \bar{\alpha}_{\hat{a}\hat{b}}$, showing that the conductivity matrix is symmetric.

Finally, we compute the Nernst response, defined as the electric field induced by a thermal gradient, as follows:

$$E^{\hat{a}} = -\vartheta^{\hat{a}\hat{b}} \nabla_{\hat{b}} T, \quad (3.53)$$

where

$$\vartheta^{\hat{a}\hat{b}} = -\rho^{\hat{a}\hat{c}} \alpha_{\hat{c}\hat{b}}, \quad (3.54)$$

and $\rho = (\sigma)^{-1}$, the resistivity matrix. The Nernst signal corresponds to the transverse response $e_N \equiv \vartheta^x_y$. The Nernst effect can actually be used to probe high- T_c superconductors [114], as for regular metals the Nernst signal is linear in the magnetic field, while for cuprate superconductors it exhibits a pronounced bell-shaped dependence in B signaling unconventional vortex dynamics or pseudogap phenomena. The Nernst signal for the model reads

$$e_N = -\frac{\mathcal{M}_{(1)}\mathcal{M}_{(2)}}{\mathcal{N}_{(1)}\mathcal{N}_{(2)}}, \quad (3.55)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(1)} &= 16\pi e^{-2\gamma} r_+^2 q_m \alpha^2 (e^{2\gamma} q_M^2 + q_E^2)^2, \\ \mathcal{M}_{(2)} &= \alpha^2 r_+^2 q_M e^{2\gamma} (\alpha^2 r_+ + q_M^2 + q_E^2) (q_E^2 + e^{2\gamma} q_M^2) \\ &\quad + 4e^{3\gamma} q_M^3 (q_M^2 + q_E^2) (\alpha^2 r_+ + q_M^2 + q_E^2) - 16q_E^2 (q_M^2 + q_E^2)^2 \\ &\quad + 4e^{\gamma} q_E^2 (q_M^2 + q_E^2) (\alpha^2 r_+ (q_M - 2r_+) + q_M (q_M^2 + q_E^2)), \\ \mathcal{N}_{(1)} &= 16q_M^2 (q_M^2 + q_E^2)^2 + \alpha^2 r_+ [8e^{\gamma} q_M (q_M^3 + r_+ q_E^2) + e^{2\gamma} r_+ q_M^2 \alpha^2 + r_+^3 q_E^2 + \alpha^2], \\ \mathcal{N}_{(2)} &= (4q_E^3 + e^{\gamma} r_+^2 q_E \alpha^2)^2 + q_M^2 [16q_E^2 (q_M^2 + 2q_E^2) + 8e^{\gamma} r_+^2 q_E^2 \alpha^2 + e^{4\gamma} r_+^4 \alpha^4]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

As shown in Fig. 4, the signal exhibits a nonlinear, bell-shaped behavior at small magnetic fields. As the field strength increases, the response gradually transitions to an approximately linear decay on B and becomes negative, showing a B -linear contribution from quasiparticles.⁷ Indeed, the curve shown in Fig. 4 reproduces the Nernst signal observed in the LSCO family of cuprate

superconductors (see Fig. 23 of [114]) with the critical and onset temperatures tuned by different values of the deformation parameter. The signal vanishes for $\alpha = 0$ as can be seen in Fig. 4(b), as expected. As previously mentioned, this behavior is characteristic of high-temperature superconductors, where the critical temperature serves as an effective order parameter marking the transition between the nonlinear and linear regimes of the Nernst signal [114]. Indeed, we find that at large values of B , while keeping γ small enough, the signal asymptotes a constant negative value, i.e.,

⁷See [143] for a description of high- T_c superconductors in terms of quasiparticle excitations without assuming thermally excited vortices.

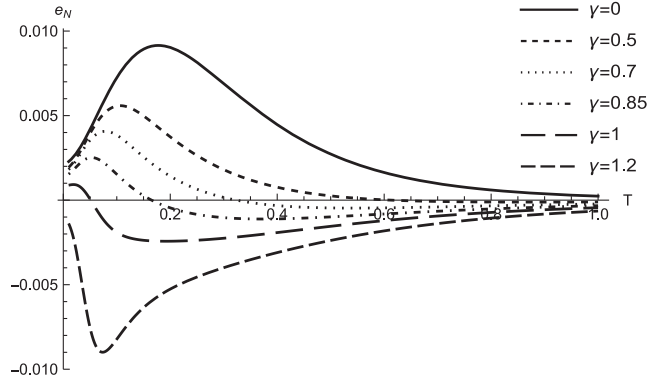


FIG. 5. Dependence of the Nernst signal on the temperature T for various values of γ , with fixed parameters $q_E = 0.1$, $q_M = 0.1$, and $\alpha = 0.3$.

$$e_N \sim -\frac{\pi \alpha^2 r_+^2}{4 q_E^2} e^{3\gamma} + \mathcal{O}(B^{-2}), \quad (3.57)$$

for large- B . We also notice that the ModMax deformation modifies the amplitude of the curve in the low- B regime, giving the possibility to model different cuprate superconductors.

Moreover, if the deformation parameter becomes much stronger than the electric charge, the Nernst signal always becomes negative, indicating that the dual metal in the highly nonlinear regime of the bulk ModMax theory is in some exotic state dominated by quasiparticle excitations abutting the superconducting dome.⁸ As shown in [114], high- T_c cuprate superconductors are confined to a vortex-liquid state below the critical temperature. As the magnetic field increases, the Nernst signal becomes dominated by a negative quasiparticle contribution when the nonlinear effects are strong enough (as can be seen in the solid curve in Fig. 4(a)). A similar qualitative behavior appears in the temperature dependence of the Nernst signal, which lacks a sharp transition, which also emerges in our holographic model. Furthermore, upon reaching an onset temperature, the signal begins to increase slightly and linearly with the magnetic field, eventually becoming positive. This linear growth is absent in our holographic model, but we expect it to appear in an extended framework that incorporates a dual superconducting state.

⁸Although we are not studying the superconducting phase of the dual material, we adopt the nomenclature of [114], where the Nernst signal of superconducting samples exhibits a Gaussian-like dome within the superconducting phase and turns negative in the normal phase at the critical temperature. Moreover, there exists an onset temperature beyond which a quasiparticle contribution causes the signal to grow linearly with the magnetic field after the critical temperature.

As illustrated in Fig. 5, the dependence of the Nernst signal on the temperature reflects this smooth crossover and subsequently starts to rise near the onset temperature. Then, varying the deformation parameter γ allows for broader Nernst profiles, suggesting that both the critical and onset temperatures of the dual metallic phase can be effectively tuned within the model.

As a final comment, we notice that the Nernst coefficient, defined as $\nu \equiv e_N/B$, becomes field independent in the small- B regime, i.e.,

$$\nu \sim \left[\frac{16\pi e^{-2\gamma}}{\alpha^2 r_+^2} - \frac{16\pi \alpha^2 r_+^2}{(4q_E^2 + \alpha^2 e^\gamma r_+^2)^2} \right] + \mathcal{O}(B), \quad (3.58)$$

as expected.

IV. CONCLUSIONS

In this paper, we compute the transport coefficients of a $(2+1)$ -dimensional strongly coupled field theory with holographic duality to Einstein gravity coupled to ModMax NLE. We begin by analyzing the (holographic) thermodynamics of static nonlinearly charged black holes, identifying an on shell equivalence with Maxwell theory for specific configurations. We introduce time-dependent perturbations in all fields and employ linear response theory to derive the DC magnetotransport properties to go beyond this trivial point.

Our results reveal that while the structure of the conductivity matrices resembles that of Maxwell theory, the nonlinear corrections significantly alter their numerical values. To incorporate lattice effects at the boundary, we introduce scalar fields and compute the transport matrices using conserved currents, yielding simple analytical expressions in terms of horizon data. Within this framework, we observe both the Hall and Nernst effects in the dual theory.

Notably, the Hall angle exhibits exponential suppression with the ModMax parameter γ at fixed charge, while for small- γ , a perfect Hall state can emerge. In the low-temperature regime, the Hall angle follows the anomalous temperature dependence characteristic of cuprate strange metals. Furthermore, the Nernst signal displays a qualitative profile reminiscent of high- T_c superconductors, featuring a superconducting dome and a normal phase, with the onset and critical temperatures modulated by the ModMax parameter.

A particularly unexplored yet intriguing regime is the ultranonlinear $\gamma \rightarrow \infty$. In this limit, the black hole solution reduces to a magnetic stealth configuration over an AdS-Schwarzschild background; a universal feature of all black holes sourced by ModMax NLE. Despite this simplification, the dual boundary theory

retains a nontrivial magnetic current, significantly influencing transport properties.

In this limit, the Hall angle becomes strongly suppressed, which indicates enhanced effective dissipation arising from nonlinear electrodynamic effects. Furthermore, the Nernst signal becomes negative in this regime, revealing an exotic quasiparticle-dominated phase in the dual theory; a particularly noteworthy result as such states are typically inaccessible in conventional AdS/CFT frameworks due to the strongly coupled nature of the boundary theory.

While the ModMax parameter γ does not alter the temperature dependence of magnetotransport, it provides a powerful tool to probe exotic phases in the dual theory. By tuning γ , we can effectively control critical and onset temperatures, offering a pathway to model realistic strongly correlated materials—such as strange metals or high- T_c superconductors—within this holographic framework. This is significant because it shows how nonlinear electrodynamics can lead to new transport regimes not allowed in linear theories, and gives insight into how holography may hint at exotic phases of matter. It would be interesting to explore vortex-driven phases of the Nernst signal by analyzing the hydrodynamic properties of the dual field theory [144,145], and to study the entropy and viscosity associated with individual vortices, following the approach of [146].

A natural extension of the present model is to construct holographic superconductors using standard techniques [9–11], by introducing mass and charge for the bulk scalar fields, allowing them to condense below a critical temperature. It would also be interesting to explore alternative boundary conditions that capture the holographic Meissner effect [104], a hallmark of superconductivity. These enhancements would enable a more systematic investigation of the role of nonlinearities in boundary phenomena and contribute to the development of more realistic holographic models of superconductors. Although ModMax is a relatively simple model with a high degree of symmetry, analytic solutions beyond the probe limit are not expected, as even in the case of standard Maxwell theory numerical methods are typically required. While our model already reproduces several qualitative features of the Nernst signal observed in cuprate superconductors, some experimental samples studied in [114] exhibit a linear increase in the signal with magnetic field beyond the normal phase; an effect we have not yet fully captured. Nevertheless, given the signs of superconducting behavior at the boundary and the tunability of the critical temperature via the deformation parameter γ , we expect these features to emerge more clearly in the extended model.

Another avenue of exploration is to consider richer black hole solutions that arise from gravity coupled to

ModMax [121,147–149]. These solutions provide more intricate bulk geometries that could play a significant role in the dual transports (see [150] for a detailed example of how rotation modifies the conductivity matrix). Particularly intriguing are the accelerating, nonlinearly charged black holes found in [129,151], as acceleration have already yielded a variety of interesting results in the holographic context [152–159]. So far, transport properties in these geometries have only been explored in the probe limit using NLE [160], where metallic signatures have already emerged. We leave the study of acceleration effects on magnetotransport for future work.

Finally, a particularly intriguing direction is the inclusion of fermionic excitations in the holographic framework, with special attention to the effects of nonlinearities of the bulk gauge sector. While fermionic degrees of freedom have been extensively studied in holographic superconductors without magnetic fields [29–38], incorporating them in models with magnetic fields and nonlinear electrodynamics could potentially reproduce phenomena such as the giant Nernst signal observed in experiments [161]. We leave these promising avenues for future work.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Gabriel Arenas-Henriquez, Sebastián Bahamondes, Ali Fatemiabari, Oriana Labrin, Constanza Quijada, David Rivera-Betancour, and Leonardo Sanhueza for comments and discussions on related topics. U.H. would like to thank Charles University for its hospitality during the final stage of this project. The work of J.B. is supported by FONDECYT Postdoctorado Grant No. 3230596. The work of N.C. is supported by Beca Doctorado Nacional (ANID) 2023 Scholarship No. 21231876. The work of F.D. has been supported by FONDECYT Grants No. 1230853 and No. 1231779. U.H. is partially supported by ANID Grant No. 21231297 and INES Project from Universidad de Talca.

DATA AVAILABILITY

The data are not publicly available. The data are available from the authors upon reasonable request.

APPENDIX: INTEGRATION CONSTANTS

Here, we provide the functions and coefficients that solve the isotropically perturbed system of Sec. III A.

The $C_{A\hat{a}}$ and $C_{H\hat{a}}$ coefficients appearing in the differential equations in the first order in the hydrodynamic perturbations (3.10) read

$$\begin{aligned}
C_{AX} &= \frac{ie^{-2\gamma}}{4q_M h(z)} \left[4q_E(-e^\gamma \alpha_Y + q_E z \gamma_Y) \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^\gamma (4e^\gamma q_M(q_E^2 + q_M^2)z^2 \alpha_X + e^{2\gamma} q_M^2 \gamma_Y 4\pi T + q_E(-4q_M(q_E^2 + q_M^2)z^3 \gamma_X + q_E \gamma_Y 4\pi T))h'(z)}{(q_E^2 + q_M^2)z^2 4\pi T} \right], \\
C_{AY} &= \frac{ie^{-2\gamma}}{4q_M h(z)} \left[4q_E(e^\gamma \alpha_X - q_E z \gamma_X) + \frac{e^\gamma (-4e^\gamma q_M(q_E^2 + q_M^2)z^2 \alpha_Y + e^{2\gamma} q_M^2 \gamma_X 4\pi T + q_E(4q_M(q_E^2 + q_M^2)z^3 \gamma_Y + q_E \gamma_X 4\pi T))h'(z)}{(q_E^2 + q_M^2)z^2 4\pi T} \right], \\
C_{HX} &= -\frac{ie^{-2\gamma}}{q_M z^2 h(z)^2 4\pi T} [q_M(-3e^\gamma + (q_E^2 + q_M^2)z^4)^2 \gamma_X + 9e^{2\gamma} q_M \gamma_X h(z)^2 \\
&\quad + z(3q_E(q_E^2 + q_M^2)z^4 \gamma_Y + e^\gamma(-4(q_E^2 + q_M^2)z^3 \alpha_Y + 3q_E \gamma_Y))4\pi T \\
&\quad - e^\gamma h(z)(18e^\gamma q_M \gamma_X - 10q_M(q_E^2 + q_M^2)z^4 \gamma_X + 3q_E z \gamma_Y 4\pi T)], \\
C_{HY} &= -\frac{ie^{-2\gamma}}{q_M z^2 h(z)^2 4\pi T} [q_M(-3e^\gamma + (q_E^2 + q_M^2)z^4)^2 \gamma_Y - 18e^{2\gamma} q_M \gamma_Y h(z) \\
&\quad + 9e^{2\gamma} q_M \gamma_Y h(z)^2 - 3q_E(q_E^2 + q_M^2)z^5 \gamma_X 4\pi T + e^\gamma z(10q_M(q_E^2 + q_M^2)z^3 \gamma_Y h(z) \\
&\quad + (4(q_E^2 + q_M^2)z^3 \alpha_X - 3q_E \gamma_X + 3q_E \gamma_X h(z))4\pi T)]. \tag{A1}
\end{aligned}$$

The $C_{\hat{a}}$ coefficients are obtained by imposing regularity on the horizon of the fluctuations, and for the first integral for the equations for $H_{\hat{a}1}$ are

$$\begin{aligned}
C_X &= \frac{3i(e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)\gamma_X}{q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma} + \frac{3ie^{-2\gamma} q_E(q_E^2 + q_M^2)\gamma_Y}{q_M} + \frac{e^{-\gamma}(3iq_E \gamma_Y - 4i(q_E^2 + q_M^2)\alpha_Y)}{q_M}, \\
C_Y &= \frac{3i(e^\gamma + q_E^2 + q_M^2)\gamma_Y}{q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma} - \frac{3ie^{-2\gamma} q_E(q_E^2 + q_M^2)\gamma_X}{q_M} - \frac{e^{-\gamma}(3iq_E \gamma_X - 4i(q_E^2 + q_M^2)\alpha_X)}{q_M}. \tag{A2}
\end{aligned}$$

The $\alpha_{\hat{a}}$ coefficients can be written as functions of $\gamma_{\hat{a}}$ as

$$\begin{aligned}
\alpha_Y &= \frac{e^{-\gamma}}{4(q_E^2 + q_M^2)} [-3e^{2\gamma} q_M \gamma_X + 3q_E(q_E^2 + q_M^2)\gamma_Y + e^\gamma(q_M(q_E^2 + q_M^2)\gamma_X + 3q_E \gamma_Y)], \\
\alpha_X &= \frac{e^{-\gamma}}{4(q_E^2 + q_M^2)} [3q_E(q_E^2 + q_M^2)\gamma_X + 3e^{2\gamma} q_M \gamma_Y + e^\gamma(3q_E \gamma_X - q_M(q_E^2 + q_M^2)\gamma_Y)]. \tag{A3}
\end{aligned}$$

Finally, integrating for the second time the fluctuations, we find

$$\begin{aligned}
R_X &= \frac{1}{4}(1-z) \left(\frac{3e^\gamma q_M(1+z)}{q_E^2 + q_M^2} - q_M(-3+z+4z^2) \right), \\
Q_X &= \frac{1}{4}(1-z) \left(-e^{-\gamma} q_E(1+(1-4z)^2 z) + 3q_E \left(-\frac{16(1-z)z^2}{q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma} + \frac{1+z}{q_E^2 + q_M^2} \right) \right), \\
P_X &= \frac{e^{-\gamma}(1-z)^2(3e^{2\gamma}(2+z) + (q_E^2 + q_M^2)^2(1+z+z^2+4z^3) - e^\gamma(q_E^2 + q_M^2)(9+z(8+7z)))}{q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma}, \\
R_Y &= \frac{1}{4} q_E(1-z) \left(\frac{48(1-z)z^2}{3e^\gamma - q_E^2 - q_M^2} + \frac{3(1+z)}{q_E^2 + q_M^2} - e^{-\gamma}(1+(1-4z)^2 z) \right), \\
Q_Y &= \frac{1}{4} q_M(1-z) \left(z+4z^2 - \frac{3e^\gamma(1+z)}{q_E^2 + q_M^2} - 3 \right), \\
P_Y &= \frac{e^{-\gamma}(1-z)^2(3e^{2\gamma}(2+z) + (q_E^2 + q_M^2)^2(1+z+z^2+4z^3) - e^\gamma(q_E^2 + q_M^2)(9+z(8+7z)))}{q_E^2 + q_M^2 - 3e^\gamma}. \tag{A4}
\end{aligned}$$

Finally, we express the integration constant $\delta_{\hat{a}}$ and $\gamma_{\hat{a}}$ in terms of the boundary data as

$$\begin{aligned}
 \delta_X = & -\frac{ie^{-2\gamma}}{16q_M(q_E^2 + q_M^2)^2} (9e^{4\gamma}\delta h_Y^0 q_M^2 \omega - 9\delta h_Y^0 q_E^2 (q_E^2 + q_M^2)^2 \omega \\
 & + e^{2\gamma}(4iq_M(q_E^2 + q_M^2)(-3\delta h_X^0 q_E + (4\delta a_X^0 + \delta h_Y^0 q_M)(q_E^2 + q_M^2)) \\
 & + (4(q_E^2 + q_M^2)(3\delta a_Y^0 q_E + q_E(3\delta h_X^0 + \delta a_X^0 q_E)q_M + \delta a_X^0 q_M^3) \\
 & + \delta h_Y^0(q_E^4 q_M^2 + q_M^6 + q_E^2(-9 + 2q_M^4)))\omega) \\
 & - 6e^\gamma q_E(q_E^2 + q_M^2)(3\delta h_Y^0 q_E \omega - 2\delta a_Y^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_X^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(2i + \omega)) \\
 & - 6e^{3\gamma} q_M(-3\delta h_X^0 q_E \omega + 2\delta a_X^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_Y^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(2i + \omega))), \\
 \delta_Y = & \frac{ie^{-2\gamma}}{16q_M(q_E^2 + q_M^2)^2} (9e^{4\gamma}\delta h_X^0 q_M^2 \omega - 9\delta h_X^0 q_E^2 (q_E^2 + q_M^2)^2 \omega \\
 & + e^{2\gamma}(4iq_M(q_E^2 + q_M^2)(3\delta h_Y^0 q_E - (4\delta a_Y^0 - \delta h_X^0 q_M)(q_E^2 + q_M^2)) \\
 & + (-4(q_E^2 + q_M^2)(-3\delta a_X^0 q_E + q_E(3\delta h_Y^0 + \delta a_Y^0 q_E)q_M + \delta a_Y^0 q_M^3) \\
 & + \delta h_X^0(q_E^4 q_M^2 + q_M^6 + q_E^2(-9 + 2q_M^4)))\omega) \\
 & - 6e^{3\gamma} q_M(3\delta h_Y^0 q_E \omega - 2\delta a_Y^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_X^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(2i + \omega)) \\
 & + 6e^\gamma q_E(q_E^2 + q_M^2)(-3\delta h_X^0 q_E \omega + 2\delta a_X^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_Y^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(2i + \omega))), \\
 \gamma_X = & \frac{ie^{-\gamma}}{4q_M(q_E^2 + q_M^2)} (3e^{2\gamma}\delta h_X^0 q_M \omega - 3\delta h_Y^0 q_E(q_E^2 + q_M^2)\omega \\
 & - e^\gamma(3\delta h_Y^0 q_E \omega - 4\delta a_Y^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_X^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(4i + \omega))), \\
 \gamma_Y = & \frac{ie^{-\gamma}}{4q_M(q_E^2 + q_M^2)} (3e^{2\gamma}\delta h_Y^0 q_M \omega + 3\delta h_X^0 q_E(q_E^2 + q_M^2)\omega \\
 & - e^\gamma(-3\delta h_X^0 q_E \omega + 4\delta a_X^0(q_E^2 + q_M^2)\omega + \delta h_Y^0 q_M(q_E^2 + q_M^2)(4i + \omega))). \tag{A5}
 \end{aligned}$$

-
- [1] G. 't Hooft, Conf. Proc. C **930308**, 284 (1993), [arXiv:gr-qc/9310026](#).
- [2] L. Susskind, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **36**, 6377 (1995).
- [3] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
- [4] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998).
- [5] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998).
- [6] S. A. Hartnoll, *Classical Quantum Gravity* **26**, 224002 (2009).
- [7] J. Zaanen, Y.-W. Sun, Y. Liu, and K. Schalm, *Holographic Duality in Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2015).
- [8] S. A. Hartnoll, A. Lucas, and S. Sachdev, [arXiv:1612.07324](#).
- [9] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 031601 (2008).
- [10] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, *J. High Energy Phys.* **12** (2008) 015.
- [11] G. T. Horowitz and M. M. Roberts, *Phys. Rev. D* **78**, 126008 (2008).
- [12] G. T. Horowitz, *Lect. Notes Phys.* **828**, 313 (2011).
- [13] R. B. Mann, *Ann. Isr. Phys. Soc.* **13**, 311 (1997), [arXiv:gr-qc/9709039](#).
- [14] G. T. Horowitz and M. M. Roberts, *J. High Energy Phys.* **11** (2009) 015.
- [15] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).
- [16] S. S. Gubser, *Classical Quantum Gravity* **22**, 5121 (2005).
- [17] S. S. Gubser, *Phys. Rev. D* **78**, 065034 (2008).
- [18] R. Gregory, S. Kanno, and J. Soda, *J. High Energy Phys.* **10** (2009) 010.
- [19] H. B. Zeng and J.-P. Wu, *Phys. Rev. D* **90**, 046001 (2014).
- [20] Z. Zhou, J.-P. Wu, and Y. Ling, *J. High Energy Phys.* **08** (2015) 067.
- [21] W.-J. Jiang, H.-S. Liu, H. Lu, and C. N. Pope, *J. High Energy Phys.* **07** (2017) 084.
- [22] A. Cisterna and J. Oliva, *Classical Quantum Gravity* **35**, 035012 (2018).
- [23] A. Cisterna, S. Fuenzalida, M. Lagos, and J. Oliva, *Eur. Phys. J. C* **78**, 982 (2018).
- [24] A. Cisterna, C. Erices, X.-M. Kuang, and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **97**, 124052 (2018).
- [25] A. Cisterna, L. Guajardo, and M. Hassaine, *Eur. Phys. J. C* **79**, 418 (2019); **79**, 710(E) (2019).
- [26] M. M. Caldarelli, C. Charmousis, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **10** (2013) 015.

- [27] M. Baggioli, A. Cisterna, and K. Pallikaris, *Phys. Rev. D* **104**, 104067 (2021).
- [28] U. Hernandez-Vera, *Phys. Rev. D* **111**, 084035 (2025).
- [29] J.-W. Chen, Y.-J. Kao, and W.-Y. Wen, *Phys. Rev. D* **82**, 026007 (2010).
- [30] T. Faulkner, G. T. Horowitz, J. McGreevy, M. M. Roberts, and D. Vegh, *J. High Energy Phys.* **03** (2010) 121.
- [31] T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy, and D. Vegh, *arXiv:1003.1728*.
- [32] T. Faulkner and J. Polchinski, *J. High Energy Phys.* **06** (2011) 012.
- [33] T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy, and D. Vegh, *Phil. Trans. R. Soc. A* **369**, 1640 (2011).
- [34] T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy, and D. Vegh, *Phys. Rev. D* **88**, 045016 (2013).
- [35] N. Grandi, V. Juričić, I. Salazar Landea, and R. Soto-Garrido, *J. High Energy Phys.* **05** (2021) 123.
- [36] N. Grandi, V. Juričić, I. S. Landea, and R. Soto-Garrido, *Phys. Rev. D* **105**, L081902 (2022).
- [37] N. Grandi, V. Juričić, I. Salazar Landea, and R. Soto-Garrido, *J. High Energy Phys.* **01** (2024) 030.
- [38] S. Bahamondes, I. Salazar Landea, and R. Soto-Garrido, *J. High Energy Phys.* **09** (2024) 080.
- [39] C. Lopez-Arcos, H. Nastase, F. Rojas, and J. Murugan, *J. High Energy Phys.* **01** (2014) 036.
- [40] T. Andrade, A. Krikun, K. Schalm, and J. Zaanen, *Nat. Phys.* **14**, 1049 (2018).
- [41] L. Alejo, P. Goulart, and H. Nastase, *J. High Energy Phys.* **09** (2019) 003.
- [42] A. Donos and J. P. Gauntlett, *J. High Energy Phys.* **04** (2014) 040.
- [43] T. Andrade and B. Withers, *J. High Energy Phys.* **05** (2014) 101.
- [44] A. Donos and J. P. Gauntlett, *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 007.
- [45] M. Baggioli, K.-Y. Kim, L. Li, and W.-J. Li, *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **64**, 270001 (2021).
- [46] D. P. Sorokin, *Fortschr. Phys.* **70**, 2200092 (2022).
- [47] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. A* **144**, 425 (1934).
- [48] W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [49] G. W. Gibbons and D. A. Rasheed, *Nucl. Phys.* **B454**, 185 (1995).
- [50] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **163B**, 123 (1985).
- [51] O. Miskovic and R. Olea, *Phys. Rev. D* **83**, 064017 (2011).
- [52] O. Miskovic and R. Olea, *Phys. Rev. D* **83**, 024011 (2011).
- [53] A. Dey, P. Roy, and T. Sarkar, *J. High Energy Phys.* **04** (2018) 098.
- [54] P. A. Cano, A. J. Murcia, A. Rivadulla Sánchez, and X. Zhang, *J. High Energy Phys.* **07** (2022) 010.
- [55] G. Arenas-Henriquez, F. Diaz, and Y. Novoa, *J. High Energy Phys.* **05** (2023) 072.
- [56] M. Bravo-Gaete, L. Guajardo, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **106**, 024017 (2022).
- [57] P. Bueno, P. A. Cano, J. Moreno, and G. van der Velde, *Phys. Rev. D* **107**, 064050 (2023).
- [58] A. Álvarez, M. Bravo-Gaete, M. M. Juárez-Aubry, and G. V. Rodríguez, *Phys. Rev. D* **105**, 084032 (2022).
- [59] F. F. Santos, M. Bravo-Gaete, M. M. Ferreira, and R. Casana, *Fortschr. Phys.* **72**, 2400088 (2024).
- [60] M. Bravo-Gaete, L. Guajardo, and F. F. Santos, *Phys. Rev. D* **107**, 104032 (2023).
- [61] F. F. Santos, M. Bravo-Gaete, O. Sokoliuk, and A. Baransky, *Fortschr. Phys.* **71**, 2300008 (2023).
- [62] F. Colipí-Marchant, C. Corral, D. Flores-Alfonso, and L. Sanhueza, *Phys. Rev. D* **107**, 104042 (2023).
- [63] M. Bravo-Gaete, F. F. Santos, J. A. Herrera-Mendoza, and D. F. Higuera-Borja, *arXiv:2504.17081*.
- [64] S. Barbosa, S. Fichet, and L. de Souza, *arXiv:2503.20910*.
- [65] H. H. Soleng, *Phys. Rev. D* **52**, 6178 (1995).
- [66] E. Ayon-Beato and A. Garcia, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5056 (1998).
- [67] H. A. Gonzalez, M. Hassaine, and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **80**, 104008 (2009).
- [68] K. A. Bronnikov, *Phys. Rev. D* **63**, 044005 (2001).
- [69] E. Ayon-Beato and A. Garcia, *Phys. Lett. B* **493**, 149 (2000).
- [70] M. Cataldo, N. Cruz, S. del Campo, and A. Garcia, *Phys. Lett. B* **484**, 154 (2000).
- [71] M. Hassaine and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **75**, 027502 (2007).
- [72] M. Hassaine and C. Martinez, *Classical Quantum Gravity* **25**, 195023 (2008).
- [73] H. Maeda, M. Hassaine, and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **79**, 044012 (2009).
- [74] J. A. R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, and J. Jarillo, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2015) 042.
- [75] J. Barrientos, P. A. González, and Y. Vásquez, *Eur. Phys. J. C* **76**, 677 (2016).
- [76] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva, and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **94**, 104039 (2016).
- [77] B. Eslam Panah, *Fortschr. Phys.* **71**, 2300012 (2023).
- [78] J. Jing and S. Chen, *Phys. Lett. B* **686**, 68 (2010).
- [79] J. Jing, Q. Pan, and S. Chen, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 045.
- [80] S. Gangopadhyay and D. Roychowdhury, *J. High Energy Phys.* **08** (2012) 104.
- [81] Y. Liu, Y. Gong, and B. Wang, *J. High Energy Phys.* **02** (2016) 116.
- [82] M. Baggioli and O. Pujolas, *J. High Energy Phys.* **12** (2016) 107.
- [83] P. Wang, H. Wu, and H. Yang, *Eur. Phys. J. C* **79**, 6 (2019).
- [84] A. Chakraborty, *Classical Quantum Gravity* **37**, 065021 (2020).
- [85] Y.-S. An, T. Ji, and L. Li, *J. High Energy Phys.* **10** (2020) 023.
- [86] C. Lai and Q. Pan, *Nucl. Phys.* **B974**, 115615 (2022).
- [87] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin, and P. K. Townsend, *Phys. Rev. D* **102**, 121703 (2020).
- [88] B. P. Kosyakov, *Phys. Lett. B* **810**, 135840 (2020).
- [89] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin, and P. K. Townsend, *J. High Energy Phys.* **03** (2021) 022.
- [90] H. Nastase, *Phys. Rev. D* **105**, 105024 (2022).
- [91] S. A. Hartnoll and C. P. Herzog, *Phys. Rev. D* **76**, 106012 (2007).
- [92] S. A. Hartnoll and P. Kovtun, *Phys. Rev. D* **76**, 066001 (2007).
- [93] M. Blake and A. Donos, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 021601 (2015).
- [94] A. Amoretti and D. Musso, *J. High Energy Phys.* **09** (2015) 094.

- [95] A. Amoretti, D. K. Brattan, N. Magnoli, and M. Scanavino, *J. High Energy Phys.* **08** (2020) 097.
- [96] A. Amoretti, D. Arean, D. K. Brattan, and N. Magnoli, *J. High Energy Phys.* **05** (2021) 027.
- [97] A. Amoretti, D. Arean, D. K. Brattan, and L. Martinoia, *J. High Energy Phys.* **11** (2021) 011.
- [98] X.-H. Ge and Z. Xu, *J. High Energy Phys.* **03** (2024) 069.
- [99] O. Domenech, M. Montull, A. Pomarol, A. Salvio, and P. J. Silva, *J. High Energy Phys.* **08** (2010) 033.
- [100] M. Montull, O. Pujolas, A. Salvio, and P. J. Silva, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 181601 (2011).
- [101] M. Montull, O. Pujolas, A. Salvio, and P. J. Silva, *J. High Energy Phys.* **04** (2012) 135.
- [102] A. Salvio, *J. High Energy Phys.* **09** (2012) 134.
- [103] A. Salvio, *J. High Energy Phys.* **03** (2013) 136.
- [104] M. Natsuume and T. Okamura, *Phys. Rev. D* **106**, 086005 (2022).
- [105] S. A. Hartnoll, P. K. Kovtun, M. Muller, and S. Sachdev, *Phys. Rev. B* **76**, 144502 (2007).
- [106] K.-Y. Kim, K. K. Kim, Y. Seo, and S.-J. Sin, *J. High Energy Phys.* **07** (2015) 027.
- [107] T. R. Chien, Z. Z. Wang, and N. P. Ong, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2088 (1991).
- [108] A. Tyler and A. Mackenzie, *Physica (Amsterdam)* **282–287C**, 1185 (1997).
- [109] E. Blaauvelt, S. Cremonini, A. Hoover, L. Li, and S. Waskie, *Phys. Rev. D* **97**, 061901 (2018).
- [110] Y. Ahn, M. Baggioli, H.-S. Jeong, and K.-Y. Kim, *Phys. Rev. B* **108**, 235104 (2023).
- [111] Z. Xu, N. Ong, Y. Wang, T. Kakeshita, and S.-i. Uchida, *Nature (London)* **406**, 486 (2000).
- [112] Y. Wang, L. Li, M. Naughton, G. Gu, S. Uchida, and N. Ong, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 247002 (2005).
- [113] L. Li, J. Checkelsky, S. Komiya, Y. Ando, and N. Ong, *Nat. Phys.* **3**, 311 (2007).
- [114] Y. Wang, L. Li, and N. Ong, *Phys. Rev. B* **73**, 024510 (2006).
- [115] V. Oganessian and I. Ussishkin, *Phys. Rev. B* **70**, 054503 (2004).
- [116] G. Tartaglione, Master's thesis, Padua University, 2022.
- [117] H. Rathi and D. Roychowdhury, *J. High Energy Phys.* **07** (2023) 026.
- [118] K. Damle and S. Sachdev, *Phys. Rev. B* **56**, 8714 (1997).
- [119] D. Flores-Alfonso, B. A. González-Morales, R. Linares, and M. Maceda, *Phys. Lett. B* **812**, 136011 (2021).
- [120] Z. Amirabi and S. Habib Mazharimousavi, *Eur. Phys. J. C* **81**, 207 (2021).
- [121] J. Barrientos, A. Cisterna, M. Hassaine, and K. Pallikaris, *Phys. Lett. B* **860**, 139214 (2025).
- [122] S. de Haro, S. N. Solodukhin, and K. Skenderis, *Commun. Math. Phys.* **217**, 595 (2001).
- [123] P. Ferrero, J. P. Gauntlett, J. M. P. Ipiña, D. Martelli, and J. Sparks, *Phys. Rev. D* **104**, 046007 (2021).
- [124] R. C. Myers, *Phys. Rev. D* **60**, 046002 (1999).
- [125] A. Ashtekar and S. Das, *Classical Quantum Gravity* **17**, L17 (2000).
- [126] R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **10**, 1680 (1974).
- [127] D. Kastor, S. Ray, and J. Traschen, *Classical Quantum Gravity* **26**, 195011 (2009).
- [128] M. M. Caldarelli, G. Cognola, and D. Klemm, *Classical Quantum Gravity* **17**, 399 (2000).
- [129] J. Barrientos, A. Cisterna, D. Kubiznak, and J. Oliva, *Phys. Lett. B* **834**, 137447 (2022).
- [130] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson, and R. C. Myers, *Phys. Rev. D* **60**, 064018 (1999).
- [131] D. C. Johnston, *Advances in Thermodynamics of the van der Waals Fluid* (Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, 2014).
- [132] O. Ökcü and E. Aydiner, *Eur. Phys. J. C* **77**, 24 (2017).
- [133] O. Ökcü and E. Aydiner, *Eur. Phys. J. C* **78**, 123 (2018).
- [134] J.-X. Mo and G.-Q. Li, *Classical Quantum Gravity* **37**, 045009 (2020).
- [135] A. Cisterna, S.-Q. Hu, and X.-M. Kuang, *Phys. Lett. B* **797**, 134883 (2019).
- [136] J. Barrientos and J. Mena, *Phys. Rev. D* **106**, 044064 (2022).
- [137] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw Hill, Tokyo, 1965).
- [138] A. Donos and J. P. Gauntlett, *J. High Energy Phys.* **11** (2014) 081.
- [139] E. Witten, *arXiv:hep-th/0112258*.
- [140] I. Papadimitriou, *J. High Energy Phys.* **05** (2007) 075.
- [141] A. Anabalón, D. Astezanesei, D. Choque, and C. Martinez, *J. High Energy Phys.* **03** (2016) 117.
- [142] N. Caceres, C. Corral, F. Diaz, and R. Olea, *J. High Energy Phys.* **05** (2024) 125.
- [143] H. Kontani, *arXiv:cond-mat/0204193*.
- [144] J. Hernandez and P. Kovtun, *J. High Energy Phys.* **05** (2017) 001.
- [145] A. Amoretti and D. K. Brattan, *Mod. Phys. Lett. A* **37**, 2230010 (2022).
- [146] K. Behnia, *J. Phys. Condens. Matter* **35**, 074003 (2022).
- [147] D. Flores-Alfonso, R. Linares, and M. Maceda, *J. High Energy Phys.* **09** (2021) 104.
- [148] A. Ballon Bordo, D. Kubizňák, and T. R. Perche, *Phys. Lett. B* **817**, 136312 (2021).
- [149] E. Ayón-Beato, D. Flores-Alfonso, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **110**, 064027 (2024).
- [150] P. Meert and H. Nastase, *Phys. Rev. D* **110**, 046004 (2024).
- [151] T. Hale, D. Kubizňák, J. Menšíková, R. B. Mann, and J. Yang, *Phys. Rev. D* **111**, 104004 (2025).
- [152] G. Arenas-Henriquez, R. Gregory, and A. Scoins, *J. High Energy Phys.* **05** (2022) 063.
- [153] G. Arenas-Henriquez, A. Cisterna, F. Diaz, and R. Gregory, *J. High Energy Phys.* **09** (2023) 122.
- [154] A. Cisterna, F. Diaz, R. B. Mann, and J. Oliva, *J. High Energy Phys.* **11** (2023) 073.
- [155] J. Tian and T. Lai, *arXiv:2312.13718*.
- [156] C. R. D. Bunney and R. B. Mann, *Classical Quantum Gravity* **42**, 075001 (2025).
- [157] G. Arenas-Henriquez, F. Diaz, and D. Rivera-Betancour, *J. High Energy Phys.* **02** (2025) 007.
- [158] S. Luo, *arXiv:2412.21013*.
- [159] Z. Li, Z. Li, and J. Tian, *J. High Energy Phys.* **05** (2025) 161.
- [160] D. Roychowdhury, *J. High Energy Phys.* **01** (2025) 134.
- [161] R. Bel, K. Behnia, Y. Nakajima, K. Izawa, Y. Matsuda, H. Shishido, R. Settai, and Y. Onuki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 217002 (2004).

Conclusiones

Esta tesis ha explorado, desde perspectivas complementarias, las consecuencias físicas de extender la relatividad general más allá de sus límites clásicos. Los cinco resultados originales que la componen comparten un hilo conductor: el estudio de agujeros negros en teorías de gravedad modificada, abarcando desde la construcción de soluciones exactas con pelo hasta el análisis de sus propiedades termodinámicas y de transporte en el marco holográfico. A continuación se resumen las principales conclusiones de cada uno.

Pelo escalar primario en teorías beyond-Horndeski. El primer resultado, desarrollado en el Capítulo 3, establece un marco sistemático y exacto para dotar a agujeros negros de pelo escalar primario en el contexto de las teorías beyond-Horndeski. Empleando un ansatz para el campo escalar con dependencia temporal lineal $\phi(t, r) = qt + \psi(r)$, se obtienen soluciones donde el parámetro de pelo q aparece explícitamente tanto en la métrica como en el campo escalar, manteniéndose regular en todo el dominio exterior. Un aspecto destacable es que el mecanismo desarrollado es lo suficientemente general como para aplicarse en dimensiones arbitrarias y en presencia de términos de curvatura superior, incluyendo la gravedad de Lovelock y la gravedad quasitopológica cúbica. Estas soluciones conectan continuamente con la geometría de vacío, evadiendo los teoremas de no-pelo mediante la estructura algebraica particular de las teorías beyond-Horndeski, y representan los primeros ejemplos de una clase sistemática de agujeros negros con pelo primario en este marco teórico.

Agujeros negros rotantes con pelo vectorial primario en $D = 5$. El segundo resultado, presentado en el Capítulo 4, extiende el programa anterior al sector vectorial masivo en cinco dimensiones. En el marco de las teorías de Proca generalizada, se construyen soluciones exactas de agujeros negros rotantes con dos momentos angulares independientes mediante el método de Kerr-Schild, donde el campo vectorial se alinea con una congruencia de geodésicas nulas. Esta alineación es esencial: reduce las ecuaciones de campo no lineales a un sistema manejable de tres ecuaciones maestras y garantiza que el campo vectorial sea nulo on-shell, simplificando considerablemente el tratamiento analítico. Las soluciones obtenidas son válidas para horizontes esféricos, planos e hiperbólicos, y admiten una constante cosmo-

lógica no nula. Un rasgo intrigante es la aparición de pelo primario codificado en una función de integración arbitraria $F_1(\theta)$, cuya interpretación física y restricciones de regularidad constituyen una pregunta abierta de interés para investigaciones futuras.

Termodinámica de agujeros negros regulares. El tercer resultado, desarrollado en el Capítulo 5, estudia la termodinámica de una clase de agujeros negros regulares cuatridimensionales obtenidos a partir de una torre infinita de correcciones de curvatura de tipo Lovelock regularizadas dimensionalmente. Mediante el formalismo de la acción Euclidiana, se calculan la masa, la entropía y la temperatura de estas soluciones, verificando el primer principio y analizando la estructura de fases. El resultado más notable es la existencia de una *degeneración termodinámica* en el caso planar: a pesar de sus geometrías radicalmente distintas, la rama regular escalarizada y la solución singular de relatividad general comparten la misma energía libre a temperatura fija. Esta degeneración se atribuye a la simetría mejorada e invarianza de escala de los horizontes planos, que permiten que el campo escalar regularice la geometría sin afectar la acción on-shell. En contraste, en el caso esférico esta degeneración se rompe cuando se incluye el acoplamiento cuadrático de Gauss-Bonnet, dando lugar a una estructura de fases más rica donde la solución regular puede ser termodinámicamente favorecida sobre la solución de Schwarzschild-AdS dependiendo de los valores de las constantes de acoplamiento.

Conductividad DC y pelo escalar primario. El cuarto resultado, presentado en el Capítulo 6, aborda una pregunta fundamental desde la perspectiva holográfica: ¿puede el pelo escalar primario de un agujero negro dejar una huella observable en las propiedades de transporte de la teoría de campos dual? La respuesta que se obtiene es negativa en lo que respecta a la conductividad DC. A pesar de que el parámetro de pelo q aparece explícitamente en la métrica y en el campo escalar, la conductividad DC depende únicamente de la ubicación del horizonte y de las cargas eléctricas y axiómicas, sin dependencia directa en q . Este resultado se establece tanto para un modelo específico de beyond-Horndeski como para una clase general de teorías con funciones de acoplamiento arbitrarias, subrayando su robustez. Una observación adicional de interés es que cuando la acción axiómicas es conformalmente invariante ($k = 2$), la dependencia explícita en el horizonte desaparece por completo de la conductividad DC, lo que plantea preguntas profundas sobre la relación entre la simetría conforme y las propiedades de transporte en modelos holográficos con disipación de momento.

Magnetotransporte holográfico con electrodinámica ModMax. El quinto y último resultado, desarrollado en el Capítulo 7, extiende el marco holográfico anterior en dos direcciones

simultáneas: la inclusión de un campo magnético externo y la sustitución de la electrodinámica de Maxwell por la teoría ModMax. Se calcula analíticamente la matriz completa de conductividades de magnetotransporte —eléctrica, termoeléctrica y térmica— en términos de datos en el horizonte. El parámetro de deformación γ de ModMax, si bien no altera la dependencia en temperatura de los coeficientes de transporte, modifica significativamente sus valores numéricos y da acceso a regímenes de transporte cualitativamente nuevos. En particular, el ángulo de Hall exhibe una supresión exponencial con γ a carga fija, mientras que la señal de Nernst reproduce cualitativamente el perfil en forma de campana observado en superconductores de cuprato de alta T_c , con las temperaturas crítica y de inicio sintonizables mediante γ . En el límite ultra-no-lineal $\gamma \rightarrow \infty$, la señal de Nernst se vuelve negativa, revelando una fase exótica dominada por excitaciones de cuasipartículas en la teoría dual, un régimen típicamente inaccesible en los marcos estándar de AdS/CFT.

Perspectivas futuras. Los resultados de esta tesis abren varias líneas naturales de investigación. En el ámbito de las soluciones exactas, resulta de interés determinar si la función de pelo $F_1(\theta)$ en las soluciones de Proca en $D = 5$ puede ser restringida por condiciones de regularidad en el horizonte o por estabilidad bajo perturbaciones lineales. En el contexto termodinámico, queda pendiente el análisis numérico de la regularidad y estabilidad de los agujeros negros esféricos con pelo escalar de la torre de Lovelock, así como la verificación de la conjetura de que la degeneración termodinámica entre soluciones regulares e irregulares persiste en casos más generales. Desde la perspectiva holográfica, sería de gran interés investigar si las transformaciones disformales, que mapean soluciones de beyond-Horndeski a la clase DHOST más general, pueden introducir una dependencia directa del pelo primario en los coeficientes de transporte, y explorar si la incorporación de excitaciones fermiónicas en el marco de ModMax permite reproducir la señal gigante de Nernst observada experimentalmente en ciertos materiales fuertemente correlacionados.

Bibliografía

- [1] Albert Einstein. The Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:844–847, 1915.
- [2] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, 2016.
- [3] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L1, 2019.
- [4] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14:57–59, 1965.
- [5] Stephen Hawking. The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 300:187–201, 1967.
- [6] S. W. Hawking and R. Penrose. The Singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 314:529–548, 1970.
- [7] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.
- [8] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman. Covariant Galileon. *Phys. Rev. D*, 79:084003, 2009.
- [9] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114:211101, 2015.
- [10] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi. Exploring gravitational theories beyond Horndeski. *JCAP*, 02:018, 2015.
- [11] Marco Crisostomi, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato. Extended scalar-tensor theories of gravity. *JCAP*, 04:044, 2016.
- [12] Jibril Ben Achour et al. Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order. *JHEP*, 12:100, 2016.

- [13] Olaf Baake, Adolfo Cisterna, Mokhtar Hassaine, and Ulises Hernandez-Vera. Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair. *Phys. Rev. D*, 109:064024, 2024.
- [14] Athanasios Bakopoulos, Christos Charmousis, Panagiota Kanti, Nicolas Lecoeur, and Theodoros Nakas. Black holes with primary scalar hair. *Phys. Rev. D*, 109:024032, 2024.
- [15] Gianmassimo Tasinato. Cosmic acceleration from abelian symmetry breaking. *JHEP*, 04:067, 2014.
- [16] Lavinia Heisenberg. Generalization of the Proca action. *JCAP*, 05:015, 2014.
- [17] S. W. Hawking. Black Hole Explosions? *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [18] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [19] J. D. Bekenstein. Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, 1973.
- [20] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [21] Pedro G. S. Fernandes. Singularity resolution and inflation from an infinite tower of regularized curvature corrections. *Phys. Rev. D*, 112:084028, 2025.
- [22] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, 1977.
- [23] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.
- [24] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett. B*, 428:105–114, 1998.
- [25] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [26] Ulises Hernandez-Vera. Lack of influence of the scalar hair on the DC conductivity. *Phys. Rev. D*, 111:084035, 2025.
- [27] José Barrientos, Nicolás Cáceres, Felipe Diaz, and Ulises Hernandez-Vera. ModMax electrodynamics and holographic magnetotransport. *Phys. Rev. D*, 112:086018, 2025.

- [28] Igor Bandos, Kurt Lechner, Dmitri Sorokin, and Paul K. Townsend. A non-linear duality-invariant conformal extension of Maxwell's equations. *Phys. Rev. D*, 102:121703, 2020.
- [29] B. P. Kosyakov. Nonlinear electrodynamics with the maximum allowable symmetries. *Phys. Lett. B*, 810:135840, 2020.
- [30] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L3, 2019.
- [31] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L4, 2019.
- [32] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L5, 2019.
- [33] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L6, 2019.
- [34] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. *Astrophys. J. Lett.*, 910:L12, 2021.
- [35] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, 1977.
- [36] James W. York. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, 28:1082–1085, 1972.
- [37] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., 1984.
- [38] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, 2003.
- [39] Brandon Carter. Black Hole Equilibrium States. *Les Houches Summer School, Black Holes*, 1973.
- [40] Z. Xie et al. Black holes in general relativity with scalar hair. *Phys. Rev. D*, 104:104044, 2021.
- [41] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [42] R. H. Boyer and R. W. Lindquist. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *J. Math. Phys.*, 8:265–281, 1967.

- [43] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969.
- [44] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. *Cambridge Univ. Pr.*, 1973.
- [45] R. P. Kerr and A. Schild. Some algebraically degenerate solutions of Einstein’s gravitational field equations. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 17:199–209, 1965.
- [46] G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild. Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell equations. *J. Math. Phys.*, 10:1842–1854, 1969.
- [47] D. A. Rasheed. The rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys. B*, 454:379–401, 1995.
- [48] Jacob D. Bekenstein. Black holes have no hair: a gedanken experiment. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:737–740, 1972.
- [49] D. Sudarsky. A simple proof of a no-hair theorem in Einstein-Higgs theory. *Class. Quant. Grav.*, 12:579–584, 1995.
- [50] Jacob D. Bekenstein. Novel no-scalar-hair theorem for black holes. *Phys. Rev. D*, 51:R6608, 1995.
- [51] Richard P. Woodard. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10:32243, 2015.
- [52] N. Bocharova, K. Bronnikov, and V. Melnikov. An exact solution of the system of Einstein equations and mass-free scalar field. *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.*, 6:706, 1970.
- [53] Jacob D. Bekenstein. Exact solutions of Einstein-conformal scalar equations. *Ann. Phys.*, 82:535–547, 1974.
- [54] B. Turimov et al. Optical properties of BBMB black hole. *Phys. Rev. D*, 2025.
- [55] Cristian Martínez, Ricardo Troncoso, and Jorge Zanelli. Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field. *Phys. Rev. D*, 70:044027, 2004.
- [56] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.
- [57] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman. Covariant Galileon. *Phys. Rev. D*, 79:084003, 2009.

- [58] Tsutomu Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review. *Rept. Prog. Phys.*, 82:086901, 2019.
- [59] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev. D*, 79:064036, 2009.
- [60] C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese. Generalized Galileons. *Phys. Rev. D*, 82:061501, 2010.
- [61] Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Jun'ichi Yokoyama. Generalized G-inflation. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511–529, 2011.
- [62] Pedro G. S. Fernandes. Gravity with a generalized conformal scalar field. *Phys. Rev. D*, 103:104065, 2021.
- [63] M. P. Dabrowski et al. Conformal transformations in cosmology. *Ann. Phys.*, 2009.
- [64] Y. Fujii and K. Maeda. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge Univ. Pr., 2003.
- [65] Curtis G. Callan, Sidney Coleman, and Roman Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Ann. Phys.*, 59:42–73, 1970.
- [66] Stanley Deser. Scale invariance and gravitational coupling. *Ann. Phys.*, 59:248–253, 1970.
- [67] D. Bettoni and M. Zumalacárregui. Kinetic gravity braiding beyond Horndeski. *Phys. Rev. D*, 91:104009, 2015.
- [68] Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian. *Phys. Rev. D*, 89:064046, 2014.
- [69] Marco Crisostomi, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato. Extended scalar-tensor theories of gravity. *JCAP*, 04:044, 2016.
- [70] Jacob D. Bekenstein. Novel no-scalar-hair theorem for black holes. *Phys. Rev. D*, 51:R6608, 1995.
- [71] Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Mokhtar Hassaine, and Nicolas Lecoer. Conformally coupled theories and their deformed compact objects. *Phys. Rev. D*, 106:064039, 2022.

- [72] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114:211101, 2015.
- [73] Carlos A. R. Herdeiro and Eugen Radu. Asymptotically flat black holes with scalar hair. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24:1542014, 2015.
- [74] Cristian Martínez and Jorge Zanelli. Conformally dressed black hole in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, 54:3830–3833, 1996.
- [75] Athanasios Bakopoulos, Christos Charmousis, Panagiota Kanti, Nicolas Lecoer, and Theodoros Nakas. Black holes with primary scalar hair. *Phys. Rev. D*, 109:024032, 2024.
- [76] Eugeny Babichev and Christos Charmousis. Dressing a black hole with a time-dependent Galileon. *JHEP*, 08:106, 2014.
- [77] Olaf Baake, Adolfo Cisterna, Mokhtar Hassaine, and Ulises Hernandez-Vera. Endowing black holes with beyond-Horndeski primary hair. *Phys. Rev. D*, 109:064024, 2024.
- [78] Eugeny Babichev, Christos Charmousis, and Mokhtar Hassaine. Charged Galileon black holes. *JCAP*, 05:031, 2015.
- [79] Lavinia Heisenberg. Generalization of the Proca action. *JCAP*, 05:015, 2014.
- [80] Jose Beltrán Jiménez and Lavinia Heisenberg. Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett. B*, 757:405–411, 2016.
- [81] Pedro G. S. Fernandes. Regularized curvature corrections. *Phys. Rev. D*, 2025.
- [82] Christos Charmousis et al. Self-tuning of the cosmological constant in galileon models. *JHEP*, 2019.
- [83] Adolfo Cisterna et al. Black holes in 5D Horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, 2016.
- [84] Christos Charmousis et al. Black holes in scalar-tensor theories. *Class. Quant. Grav.*, 2025.
- [85] Pedro G. S. Fernandes. Singularity resolution from an infinite tower of Lovelock corrections. *Phys. Rev. D*, 2025.
- [86] S. W. Hawking. Gravitational Radiation from Colliding Black Holes. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1344–1346, 1971.

- [87] J. D. Bekenstein. Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, 1973.
- [88] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [89] S. W. Hawking. Black Hole Explosions? *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [90] Robert M. Wald. Black Hole Entropy is the Noether Charge. *Phys. Rev. D*, 48:3427–3431, 1993.
- [91] V. Iyer and Robert M. Wald. Some Properties of Noether Charge and Dynamical Black Hole Entropy. *Phys. Rev. D*, 50:846–864, 1994.
- [92] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [93] Leonard Parker. Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. *Phys. Rev.*, 183:1057–1068, 1969.
- [94] Robert M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Univ. Pr., 1994.
- [95] William G. Unruh. Notes on Black Hole Evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892, 1976.
- [96] S. W. Hawking and Don N. Page. Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space. *Commun. Math. Phys.*, 87:577–588, 1983.
- [97] James W. York. Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action. *Phys. Rev. D*, 33:2092–2099, 1986.
- [98] Tullio Regge and Claudio Teitelboim. Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Ann. Phys.*, 88:286–318, 1974.
- [99] J. D. Brown and J. W. York. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, 47:1407–1419, 1993.
- [100] Tullio Regge and Claudio Teitelboim. Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Ann. Phys.*, 88:286–318, 1974.
- [101] Robert M. Wald. Nernst Theorem and Black Hole Thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 56:6467–6474, 1997.

- [102] Robert M. Wald. Nernst Theorem and Black Hole Thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 56:6467–6474, 1997.
- [103] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:505–532, 1998.
- [104] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:505–532, 1998.
- [105] Gary T. Horowitz and Robert C. Myers. The AdS/CFT Correspondence and a New Positive Energy Conjecture. *Phys. Rev. D*, 59:026005, 1998.
- [106] Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Mokhtar Hassaine, and Nicolas Lecoer. Conformally coupled theories and their deformed compact objects. *Phys. Rev. D*, 106:064039, 2022.
- [107] John L. Cardy. Operator content of two-dimensional conformally invariant theories. *Nucl. Phys. B*, 270:186–204, 1986.
- [108] Andrew Strominger. Black hole entropy from near-horizon microstates. *JHEP*, 02:009, 1998.
- [109] Roberto Emparan. AdS/CFT duals of topological black holes and the entropy of zero-energy states. *JHEP*, 06:036, 1999.
- [110] Moises Bravo-Gaete, Luis Guajardo, and Mokhtar Hassaine. A Cardy-like formula for rotating black holes with planar horizon. *JHEP*, 04:092, 2017.
- [111] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14:57–59, 1965.
- [112] Stephen Hawking. The occurrence of singularities in cosmology. III. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 300:187–201, 1967.
- [113] S. W. Hawking and R. Penrose. The Singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 314:529–548, 1970.
- [114] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., 1984.
- [115] James M. Bardeen. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In *Proceedings of the International Conference GR5*, 1968.
- [116] Eloy Ayón-Beato and Alberto García. Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5056–5059, 1998.

- [117] Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Adolfo Cisterna, and Mokhtar Hassaine. Regular black holes via the Kerr-Schild construction in DHOST theories. *JCAP*, 06:049, 2020.
- [118] Olaf Baake, Christos Charmousis, Mokhtar Hassaine, and Miguel San Juan. Regular black holes and gravitational particle-like solutions in generic DHOST theories. *JCAP*, 06:021, 2021.
- [119] Pablo Bueno, Pablo A. Cano, and Robie A. Hennigar. Regular black holes from pure gravity. *Phys. Lett. B*, 861:139260, 2025.
- [120] A. D. Sakharov. The initial stage of an expanding universe. *Soviet Physics JETP*, 22:241–249, 1966.
- [121] David Lovelock. The Einstein Tensor and Its Generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501, 1971.
- [122] David Lovelock. Divergence-Free Tensorial Concomitants. *Aequ. Math.*, 4:127–138, 1970.
- [123] Pedro G. S. Fernandes. Singularity resolution and inflation from an infinite tower. *Phys. Rev. D*, 112:084028, 2025.
- [124] J. M. Ziman. *Electrons and Phonons*. Oxford University Press, 1960.
- [125] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 2004.
- [126] Mike Blake and David Tong. Universal Resistivity from Holographic Massive Gravity. *Phys. Rev. D*, 88:106004, 2013.
- [127] Gerard 't Hooft. Dimensional Reduction in Quantum Gravity. In *Salamfestschrift*, 1993.
- [128] Leonard Susskind. The World as a Hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [129] Sean A. Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class. Quant. Grav.*, 26:224002, 2009.
- [130] Jan Zaanen et al. *Holographic Duality in Condensed Matter Physics*. Cambridge Univ. Pr., 2015.
- [131] Tomas Andrade and Benjamin Withers. A simple holographic model of momentum relaxation. *JHEP*, 05:101, 2014.

- [132] Aristomenis Donos and Jerome P. Gauntlett. Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons. *JHEP*, 11:081, 2014.
- [133] Aristomenis Donos and Jerome P. Gauntlett. Novel metals and insulators from holography. *JHEP*, 06:007, 2014.
- [134] Dam T. Son and Andrei O. Starinets. Minkowski space correlators in AdS/CFT correspondence. *JHEP*, 09:042, 2002.
- [135] Wei-Jia Jiang, Hai-Shan Liu, Hong Lu, and Christopher N. Pope. DC conductivities with momentum dissipation in Horndeski theories. *JHEP*, 07:084, 2017.
- [136] Adolfo Cisterna, Luis Guajardo, and Mokhtar Hassaine. Axionic charged black branes with arbitrary scalar nonminimal coupling. *Eur. Phys. J. C*, 79:418, 2019.
- [137] Matteo Baggioli, Adolfo Cisterna, and Konstantinos Pallikaris. Exploring the black hole spectrum of axionic Horndeski theory. *Phys. Rev. D*, 104:104067, 2021.
- [138] Yayu Wang, Lu Li, and N. P. Ong. Nernst Effect in High-Tc Superconductors. *Phys. Rev. B*, 73:024510, 2006.
- [139] José Barrientos, Nicolás Cáceres, Felipe Diaz, and Ulises Hernandez-Vera. ModMax electrodynamics and holographic magnetotransport. *Phys. Rev. D*, 112:086018, 2025.
- [140] Dmitri P. Sorokin. Introductory Notes on Nonlinear Electrodynamics. *Fortschr. Phys.*, 70:2200092, 2022.
- [141] Max Born and Leopold Infeld. Foundations of the New Field Theory. *Proc. R. Soc. A*, 144:425–451, 1934.
- [142] Werner Heisenberg and Hans Euler. Consequences of Dirac’s Theory of Positrons. *Z. Phys.*, 98:714–732, 1936.
- [143] Igor Bandos, Kurt Lechner, Dmitri Sorokin, and Paul K. Townsend. A non-linear duality-invariant conformal extension of Maxwell’s equations. *Phys. Rev. D*, 102:121703, 2020.
- [144] B. P. Kosyakov. Nonlinear electrodynamics with the maximum allowable symmetries. *Phys. Lett. B*, 810:135840, 2020.
- [145] Marco M. Caldarelli, Guido Cognola, and Dietmar Klemm. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS Black Holes and Conformal Field Theories. *Class. Quant. Grav.*, 17:399–420, 2000.

- [146] Daniel Flores-Alfonso et al. Black holes in ModMax electrodynamics. *Phys. Lett. B*, 812:136011, 2021.
- [147] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes. *Class. Quant. Grav.*, 26:195011, 2009.
- [148] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson, and R. C. Myers. Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography. *Phys. Rev. D*, 60:064018, 1999.
- [149] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, 217:595–622, 2001.
- [150] Edwin H. Hall. On a New Action of the Magnet on Electric Currents. *Am. J. Math.*, 2:287–292, 1879.
- [151] T. R. Chien, Z. Z. Wang, and N. P. Ong. Effect of Zn Impurities on the Normal-State Hall Angle. *Phys. Rev. Lett.*, 67:2088–2091, 1991.
- [152] A. W. Tyler and A. P. Mackenzie. Hall Effect of Cuprates. *Physica C*, 282–287:1185–1186, 1997.
- [153] Mike Blake and Aristomenis Donos. Quantum Critical Transport and the Hall Angle. *Phys. Rev. Lett.*, 114:021601, 2015.
- [154] Sean A. Hartnoll and Pavel K. Kovtun. Hall Conductivity from Dyonic Black Holes. *Phys. Rev. D*, 76:066001, 2007.
- [155] Vadim Oganesyan and Ilya Ussishkin. Nernst Effect in Superconductors. *Phys. Rev. B*, 70:054503, 2004.