Universidad de Talca
Instituto de Matemáticas

Examen Ingreso Doctorado 2026

7 de noviembre de 2025

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Álgebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Muestre que son equivalentes:
   (a) $V = \operatorname{im} T + \ker T$
   (b) $0 = \operatorname{im} T \cap \ker T$
2. Sea $G = \mathbb{Z}_{35}$ el grupo cíclico de orden 35. Determine el número de subgrupos de G.
3. Sea $R = \mathbb{Z}[X]$. Determine si $I = (X^2 + 1, X + 2) \subseteq R$ es un ideal maximal en R.
4. Sea K el cuerpo de descomposición del polinomio $X^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Determine $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Análisis

Resuelva los ejercicios 1 y 2. Los ejercicios 3 y 4 son opcionales.

1. Determine
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\, dx.$$
   Justifique cuidadosamente todos sus argumentos.
2. Muestre que la función $f(z) = i\dfrac{1-z}{1+z}$ es una biyección entre el semidisco positivo
$$D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ y } \operatorname{Im} z > 0\}$$
   y el cuadrante positivo
$$Q^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ y } \operatorname{Re} z > 0\}.$$
3. Sea
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{itx}\, dt.$$
   (a) Mostrar que
$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
   (b) Mostrar que f está bien definida y que es de clase C^1.
   (c) Formando una ecuación diferencial verificada por f, calcular el valor de $f(x)$.

4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función medible. Para todo $p > 0$, con $F(t) = \mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > t\}\Big)$ para $t > 0$, pruebe la igualdad

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \;=\; \int_0^\infty p\, t^{\,p-1}\, F(t)\, dt,$$

admitiendo el valor $+\infty$ en ambos lados.

Ayuda: use el Teorema de Fubini o el Teorema de Tonelli.

Topología

1. Sea L el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por el triángulo (sin su interior) con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demostrar que no hay biyección continua de L sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

2. Sea $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Se define la siguiente relación de equivalencia sobre los puntos de X:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Sea Y la colección de clases de equivalencia con la topología cociente. ¿A qué espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.

3. Sea X un espacio de Hausdorff y sea K_i, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, una familia de subespacios compactos. Demuestre que si U es un abierto que contiene a $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$, entonces existe una subfamilia finita $\{K_1, K_2, \dots, K_\ell\}$ tal que U contiene a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemáticas.

Examen Ingreso Doctorado 2025

08 de noviembre de 2024

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ y sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ los valores propios de A. Muestre que $\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m\}$ son los valores propios de A^m para cada $m \geq 1$.

2. Sea H un grupo cíclico. Muestre que todos los subgrupos de H son cíclicos.

3. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ una extensión de cuerpos de grado 5. Muestre que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2 + \alpha + 1)$.

4. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos y sea $P \subseteq B$ un ideal primo. Muestre que $f^{-1}(P) \subseteq A$ es un ideal primo.

Análisis

1. Suponga que (K, d) es un espacio métrico compacto y considere funciones $f_n : K \to \mathbb{R}$ que satisfacen

   - $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $x \in K$, y
   - $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.

   Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

2. Muestre que si $f \geq 0$ en un conjunto A de medida positiva y $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$, entonces $f = 0$, para μ-casi todo punto en A.

3. Hallar la imagen de la circunferencia $|z + 1| = 2$ situada en el plano complejo bajo la acción
$$z \longmapsto f(z) = \frac{1 - z}{z + 2}.$$
¿Cuál será la imagen del disco abierto D acotado por la circunferencia $|z + 1| = 2$ bajo la misma transformación?

4. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial
$$y'(x) + e^{x^2} y(x) = 0$$
tiende a cero cuando $x \to +\infty$.

Topología

1. Dados dos espacios topológicos X e Y,

   (a) probar que la proyección $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ es continua y abierta, donde $X \times Y$ tiene la topología producto,

   (b) probar que si Y es compacto, la proyección p_X es cerrada,

   (c) sea $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \cdot y = 1\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Probar que $p_1(H)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, donde p_1 es la proyección en la primera componente.

2. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de X siguiente:

   $$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

   Sea Y la colección de clases de equivalencia en la topología cociente. ¿A que espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.

3. Demostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemáticas.

Examen Ingreso Doctorado 2024

20 de octubre de 2023

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Sea T una transformación lineal del espacio vectorial V en V. Sea $v \in V$ tal que $T^m(v) = 0$ pero $T^{m-1}(v) \neq 0$, donde m es un entero positivo. Muestre que los vectores $v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{m-1}(v)$ son linealmente independientes.

2. Sean $H \leq G$ grupos. Sea $g \in G$ tal que $\text{ord}(g) = m$ y $g^n \in H$ para enteros positivos m y n. Suponiendo que m y n son coprimos, muestre que $g \in H$.

3. Sea E/F una extensión algebraica de cuerpos y sea $F \subseteq R \subseteq E$, con R un anillo. Muestre que R es un cuerpo.

4. Sea R un anillo con 1 y sea P un ideal primo en R. Muestre que si I y J son ideales en R tales que $I \cap J \subseteq P$ y $J \nsubseteq P$ entonces $I \subseteq P$.

Análisis

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones Riemann integrables en el intervalo $[a, b]$. Muestre que la sucesión de funciones $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s)ds$$

   tiene una subsucesión convergente.

2. (a) Pruebe que la función $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica.
   (b) Encuentre v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.
   (c) Determine f.

3. Sea $a : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una función continua y sea y una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay = 0$. Mostrar que y se anula al menos una vez.

Topología

1. Un espacio es llamado totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son conjuntos de un elemento. Demuestre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.

2. (a) Sea $X = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Definimos en X la relación de equivalencia dada por $x \sim x'$ para todo x, x' en la frontera de X (como subespacio de $\mathbb{R}^2$). Demuestre que $X/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$ la esfera 2-dimensional.

(b) Sea $X = [0, 2]$. Definimos en X la relación de equivalencia dada por $1 \sim 2$. ¿Es $X/\sim$ homeomorfo a $[0, 1]$?

3. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Sea $x \in X$ y sea $F \subseteq X$ cerrado. Demuestre que existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2023

Noviembre de 2022

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Consideremos el polinomio $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbf{Q}[x]$.
   (a) Muestre que el polinomio $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbf{Q}[x]$.
   (b) Sea α una raiz de f. Muestre que $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ es el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbf{Q}$.
   (c) Encuentre el grupo de Galois de $K/\mathbf{Q}$.
   (d) Muestre que no hay $a \in K$ tal que $K = \mathbf{Q}(a)$ y $a^3 \in \mathbf{Q}$.
2. Sea K un cuerpo y V un K-espacio vectorial. Sean U y W subespacios de V. Muestre que $U \cup W$ es un subespacio de V si y solo si $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.
3. Sea R un dominio de integridad. Demuestre que si R es finito entonces es un cuerpo.
4. En el anillo $R = \mathbf{Z}[\sqrt{10}]$, pruebe que $\sqrt{10}$ es irreducible pero no primo. De un ejemplo de un ideal en R que no sea principal.
5. Pruebe que todo grupo G de orden 15 es abeliano. Mas aún pruebe que este es cíclico. (**Ayuda** Si no fuera abeliano, tendríamos que $Z(G) = \{1\}$ y ahora use la ecuación de clases.)

Análisis

1. Dada una sucesión de números complejos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se definen

$$||(z_n)||_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad ||(z_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|.$$

   Suponga que para cierto $q > 1$ se cumple que $||(z_n)||_q < \infty$, muestre que

$$\lim_{p\to\infty} ||(z_n)||_p = ||(z_n)||_\infty.$$

2. Considere $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ y defina $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Determine $f(D^+)$.

3. Sea $q \in C([0,1])$ tal que $q(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Suponga que $u \in C^2([0,1])$ es la única solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} -u'' + qu = 0 \quad \text{en } [0,1] \\ u(0) = 1, u(1) = 0. \end{cases}$$

Muestre que $1 \leq \left(\int_0^1 |u'(x)| dx \right)^2 \leq \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$ y concluya que $u'(0) \leq -1$.

Topología

1. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de X siguiente:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

Sea X^* el espacio cociente correspondiente. Demostrar que X^* es homeomorfo a un espacio conocido.

2. Considere el conjunto X dotado de la topología Fort en p, lo que significa que un subconjunto U en X es abierto si, y sólo si, o bien $p \notin U$ o bien $X \setminus U$ es finito. Compruebe lo siguiente:

   a) X es disconexo si y sólo si X tiene más de un elemento;

   b) X es compacto

3. Sea X un espacio de Hausdorff y sea $K_i, i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, una familia de subespacios compactos. Demuestre que si U es un abierto de contiene a $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ entonces existe un conjunto finito de compactos $\{K_1, K_2, \dots, K_\ell\}$ tal que U contiene a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2022

Noviembre de 2021

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Para $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz n por n, su *centralizador* es:

$$C(A) = \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}.$$

   Muestre que si A es una matriz con n valores propios distintos entonces

$$\dim(C(A)) = n.$$

2. Sea G un grupo de orden $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ que contiene un elemento g de orden 21. Muestre que G contiene un subgrupo H con indice 8. (**Indicación:** Use un 7-subgrupo de Sylow para construir H).

3. Sea $f(x) = x^2 + 1$. Determine el conjunto de enteros $q = p^n$ tal que f es irreducible como elemento del anillo de polinomios $\mathbb{F}_q[x]$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}_q$ con q elementos.

4. Considere el anillo

$$A = \mathbf{C}[x, y]/\langle x^2 - y^3\rangle.$$

   (a) Pruebe que A es un dominio de integridad.

   (b) Sea K el cuerpo de fracciones de A. Pruebe que $K \cong \mathbb{C}(t)$. (**Indicación:** Use el homomorfismo $\varphi : A \to \mathbb{C}[t] : p(x, y) \to p(t^3, t^2)$).

Análisis

1. Para $x \geq 0$ y $n \geq 1$, se define

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right).$$

   (a) Mostrar la convergencia puntual de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ en el dominio $x \geq 0$.

   (b) Mostrar la convergencia uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ en $[0, +\infty)$.

   (c) Mostrar que no hay convergencia absoluta de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ para $x > 0$.

2. Determine la función entera $f = u+iv$ que satisface $f(0) = i$ y $u(z) = 2x^3y-2xy^3+x^2-y^2$, donde $z = (x, y)$.

3. Sea $f_n(x) = nx^{n-1} - (n + 1)x^n$ para $x \in (0, 1)$. Muestre que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

y que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|dx = \infty$.

4. Muestre que si $y(x) > 0,\ x \in (a, b)$, es una solución no constante de $y'' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$ definida en algún intervalo (a, b), entonces $y(x)$ es estrictamente monótona en (a, b).

Topología

1. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Se define una relacion de equivalencia sobre A de la siguiente forma: $(x, y) \sim (x', y')$ ssi $y - x^2 = y' - (x')^2$. Sea A^* el espacio cociente correspondiente. ¿A que espacio Z conocido es A^* homeomorfo? Demostrarlo. *Ayuda: usar la función* $f : A \to Z, f(x, y) = y - x^2$.

2. Si A es un subespacio de X, una retracción es una función continua $f : X \to A$ tal que $f(a) = a$ para todo $a \in A$. Determinar si existe una retracción $f : S^1 \times S^1 \to A$, donde $A = (S^1 \times \{b_0\}) \cup (\{b_0\} \times S^1)$.

3. Sea X un espacio de Hausdorff. Demostrar que si A es un subespacio de X finito y conexo, entonces A tiene un solo punto.

4. Sean A y B susbespacios compactos de un espacio de Hausdorff X. Demostrar que $A \cap B$ es también compacto. Encontrar un contraejemplo cuando X no es de Hausdorff. *Ayuda: tomar* $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *donde* $\mathbb{R}$ *tiene la topología usual y* $\{0, 1\}$ *la topología trivial. Considerar* $A = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ((0, 1) \times \{1\})$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemáticas.

Examen Ingreso Doctorado 2021

11 de Noviembre de 2020

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Para $n \geq 2$ sea P la siguiente matriz $n \times n$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Muestre que P es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

2. Sea G un grupo de orden $|G| = 2m$ donde m es impar.

   (a) Muestre que G es subgrupo del grupo simétrico S_{2m} y que existe un elemento $\sigma \in G$ tal que el signo de σ en S_{2m} es -1.

   (b) Muestre que G tiene un subgrupo normal de orden m.

3. Para $a \in \mathbb{Z}$ se define $f_a(x) = x^7 + 15x^2 - 30x + a \in \mathbb{Z}[x]$. Muestre que hay un número infinito de valores de a tales que $f_a(x)$ es irreducible.

4. Sea $F \subseteq K$ una extensión de cuerpos y sea $\alpha \in K$. Muestre que α es algebraico sobre F si y solo si α^2 es algebraico sobre F.

Análisis

1. Sea $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   - E satisface la ecuación $E'(z) = E(z)$, $z \in \mathbb{C}$, con $E(0) = 1$.
   - E satisface $\lim_{h \to 0} \frac{E(h)-1}{h} = 1$, $h \in \mathbb{R}$, y $E(z + w) = E(z)E(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{R}$.

2. Sea E el conjunto de las funciones continuas de $[0, 1]$ con valores en $I =]0, \infty[$. Para $f \in E$, se define

$$J(f) = \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} \right).$$

   Determinar $m = \inf \{ J(f) |\ f \in E \}$ y tambien determinar todas las funciones de E que satisfacen $J(f) = m$.

3. Determinar

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt.$$

Topología

1. Se puede demostrar que hay un número infinito de primos usando un argumento topológico. Sea $\mathcal{B} = \{N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$ el conjunto de las progresiones aritméticas $N_{a,b} = \{a + kb \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Demostrar que $\mathcal{B}$ forma una base de una topología $\mathcal{T}$ de $\mathbb{Z}$.

   (b) Demostrar que cada $N_{a,b}$ es abierto y cerrado en $\mathcal{T}$.

   (c) Sea $P = \{2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de números primos. Demostrar que

   $$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup\{N_{0,p} \mid p \in P\}.$$

   Entonces, si P fuera finito, $\{-1, 1\}$ sería abierto en $\mathcal{T}$.

2. Sea K un subespacio compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$. Demostrar directamente que K no es abierto (es decir, sin suponer que $\mathbb{R}^n$ es conexo). *Indicación: demostrar que cualquier abierto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene a K es tal que $U \setminus K$ no es vacío.*

3. Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua cerrada y sobreyectiva. Demostrar que si X es normal, también lo es Y. *Indicación: si U es un abierto de X que contiene a $p^{-1}(y)$, demostrar que existe entorno W de y tal que $p^{-1}(W) \subseteq U$.*

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2020

20 de Noviembre de 2019

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Sea K un cuerpo. Se considera el conjunto de matrices $L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in K \right\}$.

   (a) Muestre que L es un anillo con las operaciones usuales sobre matrices. Muestre que L tiene un subcuerpo isomorfo a K.

   (b) Muestre que L es un cuerpo sí y sólo sí la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en K.

   (c) Usando (a) y (b) construya un cuerpo E con 9 elementos.

2. Sea G un subgrupo abeliano del grupo simétrico S_n. Suponga que para cada $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma a = b$. Muestre que $|G| = n$.

3. Sea R un dominio de ideales principales y sea $0 \neq P \subset R$ un ideal primo. Muestre que P es un ideal maximal.

4. En general para un elemento algebráico γ sobre un cuerpo K se denota por $P_{\gamma,K}(x)$ el polinomio minimal de γ sobre K. Sean α y β elementos algebráicos sobre un cuerpo F y sean $m = \deg P_{\alpha,F}(x),\ n = \deg P_{\beta,F}(x)$. Demostrar

   (a) $\deg P_{\alpha,F(\beta)} = m \iff \deg P_{\beta,F(\alpha)} = n$.

   (b) Si $\text{mcd}(m, n) = 1$ entonces las condiciones en (a) se cumplen.

Análisis

1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x_0 \in X$ fijo. Denote por $BC(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son continuas y acotadas. Para cada $p \in X$ definimos la función $f_p : X \to \mathbb{R}$ como

$$f_p(x) = d(x, p) - d(x, x_0).$$

   (a) Muestre que $f_p \in BC(X, \mathbb{R})$.

   (b) Verifique que si $p, q \in X$ entonces

$$\|f_p - f_q\|_\infty = d(p, q)$$

   (c) Muestre que si $\Phi : X \to BC(X, \mathbb{R})$ está definida como $\Phi(p) = f_p$, entonces $\overline{\Phi(X)}$ es un espacio métrico completo. *Y por lo tanto se concluye que cualquier espacio métrico X es isometrico a un subconjunto denso de un espacio métrico completo.*

2. Suponga que f es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$. Muestre que si $f(0) = 0$ y $0 \leq f'(x) \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$, entonces

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

3. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Para f, g medibles, definamos

$$d(f,g) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

Diremos que una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida* a f, lo que denotaremos por, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Muestre que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ sí y sólo sí $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

4. Sea f una función entera para la cual existen constantes $M, R > 0$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^\alpha$, para todo $|z| > R$, donde $0 < \alpha < 1$. Muestre que f es constante.

Topología

1. Demostrar que una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \to Y$ de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y es una aplicación cociente.

2. Sean A y B subconjuntos propios de X e Y respectivamente. Si X e Y son conexos, demostrar que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

también es conexo.

3. Sea X un espacio métrico con distancia d. Sean C un compacto en X y V un abierto de X que contiene a C. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in X - V$ se tiene que $d(w, C) \geq \delta$. *Indicación: Acuerdense que* $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \,|\, a \in A\}$ *es una función continua.*

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2019

14 de Noviembre de 2018

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 4 horas

Álgebra

1. Sea A una matriz compleja de dimensión $n \times n$ tal que $A^2 = A$. Muestre que A es diagonalizable.

2. Sea G un grupo infinito, y sean H y K subgrupos de G tales que los índices $|G : H|$ y $|G : K|$ sean finitos. Muestre que el índice $|G : (H \cap K)|$ es finito.

3. Sea $n = 11 \times 17$. Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{Z}$ a la ecuación $x^2 \equiv -x \bmod n$.

4. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ una extensión de cuerpos de grado impar. Muestre que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2+\alpha+5)$

Análisis

1. Suponga que $f \in C^1([a,b])$, $f(a) = f(b) = 0$ y $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Muestre que

   (a) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$.

   (b) $\displaystyle\frac{1}{4} \leq \int_a^b (f'(x))^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx$.

2. Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Sea f una función holomorfa en G. Suponga que una de las funciones u, v o $|f|$ es constante en G, donde $f = u + iv$. Muestre que f es constante en G.

3. Sea $y = y(x)$ la solución maximal del problema de Cauchy (o sea, una solución del problema inicial definida en su máximo intervalo de existencia)

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} y'' = -y^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Muestre que se cumple
   $$\frac{1}{2}(y'(x))^2 + \frac{1}{4}(y(x))^4 = \frac{1}{4},$$
   para cada x donde la solución está definida.

   (b) Muestre que la ecuación (P) tiene efectivamente una *única* solución maximal.

   (c) Muestre que la solución está definida para todo x real.

   (d) Muestre que $y(x) = y(-x)$.

Topología

1. Sea X un espacio topológico y sea

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

la diagonal. Demuestre que X is Hausdorff si y solo si $\Delta \subseteq X \times X$ es cerrado en $X \times X$.

2. Sea X un espacio métrico y completo con distancia d y sea $f : X \to X$ una aplicación tal que existe $0 \leq \alpha < 1$ con $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Demuestre que existe un único punto $x \in X$ con $f(x) = x$.

3. Sean X y Y espacios topológicos con X localmente compacto y Hausdorff. Dotamos el conjunto

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\}$$

con la topologia generado por los conjuntos

$$S(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}$$

donde K es un subespacio compacto de X y U es un subespacio abierto de Y. (Esto se llama la topologia *compacto-abierto*.) Demuestre que la aplicación de evaluacion

$$\text{ev} : C(X, Y) \times X \to Y \quad \text{con} \quad \text{ev}(f, x) = f(x)$$

es continua.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2018

15 de Noviembre de 2017

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sean A y B matrices sobre $\mathbb{C}$ de tamaño $n \times n$ y suponga que A tiene n valores propios distintos. Demuestre que $AB = BA$ si y sólo si existe una matriz invertible C sobre $\mathbb{C}$ tal que $C^{-1}AC$ y $C^{-1}BC$ son matrices diagonales.

2. Sea G un grupo tal que su grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(G)$ es un grupo cíclico. Pruebe que G es un grupo abeliano.

   Indicación: Considere el homomorfismo canónico $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$.

3. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de polinomios sobre los enteros $\mathbb{Z}$. Sea $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ un automorfismo de anillo que fija puntualmente los elementos de $\mathbb{Z}$. Demuestre que φ tiene la forma $\varphi(x) = ax + b$, donde $a = \pm 1$ y $b \in \mathbb{Z}$.

Análisis

1. Para $I = [0, 1]$, considere una función continua $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina la sucesión de funciones $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_0(x) = g(x),$$
$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

   Demuestre que la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0.

2. Sea $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Muestre que para $z, w \in D(0, 1)$ se tiene que

$$\left|\frac{z - w}{1 - z\bar{w}}\right| < 1.$$

3. Para $n \geq 1$, se define

$$P_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

   Muestre que P_n tiene una unica raiz real u_n, demuestre que la sucesión u_n converge y encontrar su limite.

Topología

1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $F \subseteq X$ un subconjunto finito. Muestre que F es cerrado.

2. Demuestre que el intervalo $[0, 1]$, el círculo S^1 y la esfera S^2 son espacios homeomorficamente distintos.

3. Sea X un espacio compacto y sea $\sim$ una relacion de equivalencia en X. Muestre que el espacio cociente $X/\sim$ es compacto. (*No se requiere que un espacio compacto sea de Hausdorff*).

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2017

16 de Noviembre de 2016

Tres secciones: álgebra, análisis, topología

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas

Álgebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea T una transformación lineal de V. Muestre que $T^N = 0$ para un entero $N > 0$ si y sólo si existe base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ sea triangular superior con ceros en la diagonal.

2. Sea G un subgrupo del grupo símetrico S_n y suponga que G contiene una transposición. Muestre que existe subgrupo $N \leq G$ tal que $|G : N| = 2$.

3. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Muestre que $3 \in R$ es un elemento irreducible de R pero que no es primo. ¿Es R de factorización única?

4. Sea $f(x) = x^3 + 9x + 6$ y sea $R = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$. Muestre que $\overline{x+1}$ es una unidad en R y encuentre $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tal que la inversa de $\overline{x+1}$ tenga forma $\overline{ax^2 + bx + c}$.

Análisis

1. Sea Ω un conjunto abierto conexo no vacio y f una función holomorfa $f \in H(\Omega)$. Sea P la parte real de f y Q la parte imaginaria. Se supone que existen tres reales (no nulos) a, b y c tales que
$$aP(z) + bQ(z) + c = 0, \qquad \forall z \in \Omega.$$
(a) Mostrar que P y Q satisfacen
$$\begin{cases} a\frac{\partial P}{\partial x} - b\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ b\frac{\partial P}{\partial x} + a\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b\frac{\partial Q}{\partial x} + a\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ -a\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
(b) Deducir que f es constante.

2. Considere la succesión de funciones
$$f_n(x) = 3^n \left[x^{3^n} - x^{3^{n+1}}\right], \qquad n \geq 1, x \geq 0$$
Determinar el dominio D donde hay convergencia puntual y determinar si hay o no convergencia uniforme en D.

3. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Mostrar que f es convexa si y sólo si para todo $[a, b] \subset I$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función definida en $[a, b]$ por $g(x) = f(x) + \alpha x$ es acotada en $[a, b]$ y que $\mathrm{Max}_{x\in[a,b]} g(x) = \mathrm{Max}\,(g(a), g(b))$.
(*Por definición, se dice que una función f es convexa en un intervalo I si para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.*)

Topología

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son bases de una topología en $\mathbb{R}$. Determine además si los espacios topológicos correspondientes son Hausdorff o conexos o compactos.

   (a) $\mathcal{B}_1$ la colección de intervalos $]a, b[$ con $a < b$.

   (b) $\mathcal{B}_2$ la colección de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyo complemento es finito.

   (c) $\mathcal{B}_3$ la colección de intervalos $]-\infty, b[$ con $b \in \mathbb{R}$.

2. Demuestre que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

3. Un espacio es llamado totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son conjuntos de un elemento. Demuestre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2016

19 de Noviembre de 2015

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sean A, B matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que A es invertible, demuestre que $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} B$, donde para cada matriz C se denote el rango de C por $\operatorname{rang} C$.

2. Demuestre que todos los subgrupos de un grupo cíclico son cíclicos. Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$.

3. Encuentre el polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Determine si el anillo $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$ es un dominio de factorización única.

Análisis

1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

2. Identificar la superficie cuádrica en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$ y hallar sus proyecciones ortogonales en los tres planos coordenados OXY, OXZ, OYZ.

3. Encuentre todos los números complejos z con $|z| = 1$ tal que

$$\left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1.$$

Topología

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X tenga un subconjunto denso de cardinalidad 1 (con un solo punto). Dar un ejemplo de un espacio que verifique esa condición.

2. Dados dos espacios topológicos X e Y,

   (a) probar que la proyección $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ es continua y abierta, donde $X \times Y$ tiene la topología producto,

   (b) probar que si Y es compacto, la proyección p_X es cerrada,

   (c) probar que $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde p_1 es la proyección en la primera componente, no es cerrada.

3. Probar que el espacio proyectivo real es la compactificación de Alexandroff (compactificación por un punto) de la banda de Moebius. *La banda de Moebius es el espacio cociente obtenido de* $(0,1) \times [0,1]$ *identificando los puntos* $(x,0)$ *e* $(1-x,1)$*, para* $x \in (0,1)$*. El espacio proyectivo real es el disco unitario* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ *con los puntos* (x,y)*,* $(-x,-y)$ *de la frontera identificados.*

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2015

19 de Noviembre de 2014

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sean A, B matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que $AB = BA$, muestre que A y B tienen un vector propio en comun.

2. Sea R un anillo comutativo unital y sea Σ el conjunto de ideales de R cuyos elementos son divisores de cero de R. Muestre que Σ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

3. Sea G el grupo generado por $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 1 && \text{para todo } i \\ \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i && \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i &= \sigma_j\sigma_i\sigma_j && \text{si } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

   Demuestre que G es isomorfo al grupo simétrico S_n.

4. Dos matrices A, B cuadradas se dicen similares si existe una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Sea A una matriz cuadrada con entradas de $\mathbb{C}$. Muestre que A y su traspuesta A^t son similares.

Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una función medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

   donde $\alpha > 1$.

   a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

   b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

Topología

1. Sean Y e Z dos espacios topológicos disjuntos (es decir $Y \cap Z = \emptyset$) y sea $X = Y \cup Z$ la unión de Y y Z. Sea $\mathcal{T}$ la familia de subconjuntos de X dada por $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si $U = U_Y \cup U_Z$ donde $U_Y \subset Y$ y $U_Z \subset Z$ son abiertos.

   (a) Demuestre que $\mathcal{T}$ es una topología en X llamada la topología de la unión disjunta.

   (b) Si Y y Z son Hausdorff, ¿es $X = Y \cup Z$ Hausdorff con la topología de la unión disjunta?

   (c) Si Y y Z son conexos, ¿es $X = Y \cup Z$ conexo con la topología de la unión disjunta?

   (d) Si Y y Z son compactos, ¿es $X = Y \cup Z$ compacto con la topología de la unión disjunta?

2. Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ y sea $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que X es arco conexo pero no localmente arco conexo (recuerdese que un espacio X es localmente arco conexo si, para todo $x \in X$, cada entorno de $x \in X$ contiene un entorno de x arco conexo).

3. Sea X un espacio Hausdorff y sea K_i, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, una familia de subespacios compactos. Demuestre que si U es un abierto que contiene a $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ entonces existe un conjunto finito de compactos $\{K_1, K_2 \dots, K_\ell\}$ tal que U contiene a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2014

18 de Noviembre de 2013

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ y sean $v_1, v_2 \ldots, v_k$ vectores propios de A a valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Suponiendo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, muestre que los v_i son linealmente independientes.

2. Sea R un anillo y sea Σ el conjunto de ideales de R cuyos elementos son divisores de cero de R. Muestre que Σ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una funcion medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

donde $\alpha > 1$.

   a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

   b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

Topología

(a) Sea $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||(x_1, \ldots, x_{n+1})|| = 1\}$ y sea $E(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ el ecuador de S^n.

i. Probar que el cociente de S^n por $E(S^n)$es homeomorfo al producto wedge de dos copias de S^n.

ii. Sea $H(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$. Demostrar que el cociente de $H(S^n)$ por su borde $\partial(H(S^n))$ es homeomorfo a S^n.

(b) Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de números reales con la topología cuya base de abiertos es:

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a < b\}.$$

Considere la recta $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l \mid x = -y\}$ en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, con la topología inducida por la topología producto. Probar que L es unión de dos cerrados disjuntos.

(c) Sea $p : E \longrightarrow B$ un cubrimiento, con B conexo. Probar que si $|p^{-1}(b_o)| = k$ para algún $b_o \in B$, entonces $|p^{-1}(b)| = k$ para todo $b \in B$.

(d) Probar que:

i. El espacio R_l del ejercicio 2) no es metrizable.

ii. Probar que el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la topología dada por el orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ es metrizable, y por lo tanto normal. Qué sucede si consideramos $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología dada por el orden lexicográfico?

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de Ingreso al Doctorado–Diciembre 2012

Tres secciones: álgebra, análisis y topología
Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea A una matriz real $n \times n$. Muestre que A^tA y A tienen el mismo rango (*Indicación:* considere primero la nulidad de las matrices).

2. Sea G un grupo finito, y sea N el subgrupo de G generado por el subconjunto $\{\, g^2 \mid g \in G\}$. Muestre que N es un subgrupo normal de G y que N contiene al subgrupo comutador $[G, G]$ de G.

3. Sea R un dominio principal y sean $A, B \neq 0$ ideales de R. Muestre que $AB = A \cap B$ si y solo si $A + B = R$.

4. Muestre que cada cuerpo algebraicamente cerrado tiene número infinito de elementos.

Análisis

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - (2x + n)$$

donde n es un entero positivo.

1. Demuestre que la ecuacion $f_n(x) = 0$ admite una unica solucion en $[0, 1[$ que se denota por x_n.

2. Mostrar que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, y que $f_{n+1}(x_n) < 0$ y deducir que la sucesion x_n es creciente y convergente.

3. Calcular $f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ y deducir el valor $\lim_{n\to\infty} x_n$

Topología

1. Probar que toda aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es constante.

2. *a*) Probar que todo espacio conexo por arcos es conexo.
   b) Dar un ejemplo de un espacio conexo que no es conexo por arcos.

3. Probar que el cociente $S^1 \times [0, 1] \sim$ es homeomorfo a S^2, donde

$$((x, y), t) \sim ((x', y'), t'), \text{ si, y solo si, } t = t' = 1, \text{ o } t = t' = 0.$$

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2012

Diciembre 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sean G un grupo finito y σ un automorfismo de G.

   (a) Demuestre que si $\sigma(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$, entonces G es abeliano.

   (b) Demuestre que si $\sigma^2 = 1$ y $x \neq \sigma(x)$ para cada $x \in G$ con $x \neq 1$, entonces

   $$G = \{x^{-1}\sigma(x) \mid x \in G\}.$$

   (c) Suponiendo (b), demuestre que G es abeliano.

2. Sea F un cuerpo finito con q elementos. Calcule el número de matrices 2 por 2 invertibles con elementos en F, y el número de matrices 2 por 2 con elementos en F y determinante igual a 1.

3. Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Demuestre que R es un dominio. Sea F el cuerpo cuociente de R. ¿Un polinomio mónico $f(t) \in R[t]$ puede tener ceros en $F \setminus R$? Justifique su respuesta.

Análisis (resolver 2 de 3)

1. Usando una seria (u otra herramienta) adecuada, calcule los tres primeros dígitos a, b, c de la presentación decimal

   $$\ln 2 = 0.abc\ldots$$

   Se requiere una justificación analítica para su respuesta. No se permite el uso de calculadora en ninguna etapa de su trabajo.

2. Las funciones $v, w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1, tienen sus derivadas estrictamente positivas en $[0, 1]$ y son tales que

   $$v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1).$$

   Demuestre que existen puntos $x_1 \leq x_2$ en $[0, 1]$ tales que

   $$v(x_1) = w(x_2), \quad v'(x_1) = w'(x_2).$$

3. Para $x > -1$ considere la sucesión de funciones

$$x, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}, \ldots, f_n(x), \frac{1}{1+f_n(x)}, \ldots$$

Investigue la convergencia de esta sucesión y caracterice los subconjuntos de $(-1, \infty)$ donde esta convergencia es uniforme.

Topología

1. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos de recta L_n de $(0,0)$ a $(1, 1/n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ junto con el segmento límite L_∞ de $(0,0)$ a $(1,0)$. Se define una topología $\mathcal{T}$ sobre X en la cual O es abierto en X ssi $O \cap L_n$ es abierto en L_n para todo n (incluyendo $n = \infty$), donde cada $L_n \subset \mathbb{R}^2$ tiene la topología del subespacio. Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología. Demostrar que X no es compacto en la topología $\mathcal{T}$. ¿Es X compacto como subespacio de $\mathbb{R}^2$?

2. Encontrar aplicaciones cocientes de $D^2 \to S^1$, de $S^2 \to D^2$ y de $S^2 \to S^1$. *Indicación: no se necesitan aplicaciones explícitas. Basta con una buena descripción geométrica.*

3. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la clausura del grafo de $\text{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Encontrar las componentes conexas de X. Justificar su respuesta.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado

Mayo 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea R un dominio de integridad que contiene un cuerpo F como subanillo. Suponga que R tiene dimensión finita como espacio vectorial sobre F. Pruebe que R es un cuerpo.

2. Sea $Z(G)$ el centro de G. Demuestre que no existe grupo G tal que $G/Z(G)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden 3. *Indicación: demuestre todas sus afirmaciones!*

3. Encontrar todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$.

Análisis

1. Sea f una funcion definida en $\mathbb{R}$, continua en 0 y tal que $f(x) = f(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es constante.

2. Sea la serie $\sum u_n$ con termino general

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Estudiar la naturaleza de la serie en termino del parametro k.

3. Sean f y g dos funciones definidas en $]0, \infty[$ por

$$f(x) = \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{x\, e^x}{1 - e^x}$$

Demuestre que existe un unico $\alpha \in]0, \infty[$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Topología

1. Sea $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x \leq 1\}$. Considere el cuadrado ordenado I_0^2, es decir, el conjunto $I \times I$ con la topología inducida por el orden del diccionario. Determine la clausura de los siguientes conjuntos:

$$A = (1/2, 1) \times \{0\} \qquad B = (\mathbb{Q} \cap I) \times \{1/2\}.$$

2. La gráfica de una función $f : X \to Y$ es el conjunto $\big\{\big(x, f(x)\big) \,\big|\, x \in X\big\}$. Demuestre que si f es una función continua, entonces la gráfica de f, como subespacio de $X \times Y$, es homeomorfa a X.

3. Considere el conjunto X dotado de la topología Fort en p, lo que significa que un subconjunto U en X es abierto si, y sólo si, o bien $p \notin U$ o bien $X \setminus U$ es finito. Compruebe lo siguiente:

   a) X es disconexo;

   b) X es compacto.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2011

Enero 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Sean A, B transformaciones lineales de V, tales que $A^2 = B^2 = 0$ y $AB + BA = I$, donde I denota la identidad de V. Sean N_A y N_B los nucleos de A y B respectivamente.

   a) Pruebe que $N_A = AN_B$, $N_B = BN_A$ y $V = N_A \oplus N_B$.

   b) Pruebe que la dimensión de V es par.

   c) Pruebe que si la dimensión de V es 2 entonces V posee una base con respecto a la cual A y B están representadas por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respectivamente.

2. Sea K un cuerpo y sean $K[X]$, $K[X,Y]$ los anillos de polinomios en una y dos variables respectivamente. Si I es un ideal de $K[X,Y]$ se escribe $\overline{P(X,Y)}$ por la clase de $P(X,Y) \in K[X,Y]$ en $K[X,Y]/I$ y si $Q(X,Y) \in K[X,Y]$ se escribe $(Q(X,Y))$ por el ideal de $K[X,Y]$ generado por $Q(X,Y)$.

   a) Pruebe que la aplicación $\varphi : K[X] \to K[X,Y]/(X^2 - Y)$ dada por $f(X) \mapsto \overline{f(X)}$ es un isomorfismo de anillos.

   b) Determine si los anillos $K[X,Y]/(X^2 - Y)$ y $K[X,Y]/(X^2 - Y^2)$ son isomorfos.

Análisis

1. Sea $P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$. Demuestre que P admite al menos una raíz en $[0,1]$.

2. Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que f no es de clase C^1.

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

4. Sea f una función definida en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que $\exists c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Topología

1. Demostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

2. Un espacio X se dice *regular* si para todo punto $x \in X$ y todo conjunto cerrado C que no contiene a x, existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $C \subseteq U$ y $x \in V$. Demostrar que un espacio compacto y de Hausdorff es regular.

3. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de X siguiente:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

   Sea Y la colección de clases de equivalencia en la topología cociente. ¿A que espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.

Examen de admisión

Topología

(1) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(2) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Demuestre que existe un punto x tal que $f(x) = x$.

Análisis

(1) Demuestre que la ecuación $x = \cos(x^2)$ tiene una solución en el interválo $[0, \sqrt{\pi}]$.

(2) Verifique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ es convergente o divergente.

(3) Calcule el volumen de la región

$$\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq (x^2 + y^2)^{1/4}\}.$$

Álgebra

(1) Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Demuestre la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(i) existe un entero $N \geq 1$ tal que $A^N = 0$

(ii) para todo entero $k \geq 1$, la traza de A^k es nula

Indicación: Usar los valores propios de A

(2) Sea k un cuerpo y sean X, Y, Z, T variables. Sea $I = \langle X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3 \rangle \subset k[X, Y, Z]$ el ideal de $k[X, Y, Z]$ generado por los polinomios $X^2 - Y^3$ y $Y^2 - Z^3$. Demuestre que la aplicación $\phi : k[X, Y, Z] \to k[T]$ dada por $\phi(f(X, Y, Z)) = f(T^9, T^6, T^4)$ es un homomorphismo con núcleo $\mathrm{Ker}(\phi) = I$. ¿Es $k[X, Y, Z]/I$ isomorfo a $k[T]$?

Indicación: Todo polinomio $f \in k[X, Y, Z]$ se puede escribir de la forma

$$f = a + Xb + Yc + XYd + g$$

con $a, b, c, d \in k[Z]$ y $g \in I$.

Universidad de Talca 20 de Marzo de 2008

Examen Ingreso a Doctorado

Instrucciones:

1.- Este examen consta de 3 partes: Algebra, Topología, Análisis, en cada una de estas partes hay 4 preguntas. Contestar solo 2 preguntas en cada parte.

2.- Tiempo total para el examen responder 3 horas.

Sección Topología

(1) Sea X un espacio topológico. Se dice que D es denso en X si su clausura, $\overline{D} = X$.
a) Si X es el único subconjunto denso de X, cuál es la topología sobre X?
b) Encontrar A, D y X tal que D es denso en el espacio topológico X, pero $D \cap A$ no es denso en $A \subseteq X$.

(2) Sea $\mathfrak{T}$ la topología sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cuya base está dada por las rectas del tipo $y = 2x+k$, con $k \in \mathbb{R}$. Demostrar que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{T})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$ para ciertas topologías $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$.

(3) El grafo de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ para $x \in X$. Demostrar que si f es una función continua, entonces el grafo de f (como subespacio de $X \times Y$) es homeomorfo a X.

(4) Mostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

Parte Algebra

(1) Demuestre que el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ de los números racionales no puede estar generado por un número finito de elementos.

(2) Demuestre que el anillo $\mathbb{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ no es principal.
Indicación: Considere el homomorfismo $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T],\ X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$.

(3) Sea α una raíz del polinomio irreducible $X^3 - 3x + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)$ el cuerpo que genera esta raíz. Calcular explicitamente el inverso de $1+\alpha+\alpha^2$ en $\mathbb{Q}[\alpha]$ como $a+b\alpha+c\alpha^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(4) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{100}.

Parte Análisis

(1) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Definamos $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

(2) Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con $f(0) = 0$. Supongamos que f es diferenciable en $(0,\infty)$ con una derivada f' monótonamente creciente. Demuestre que la función $f(x)/x$, $x \in (0,\infty)$ es creciente.

(3) Sea $f : [0,\infty) \to (0,1]$ definida por $f(x) = (x+1)\exp(-x)$. Demuestre que f es biyectiva y calcule $(f^{-1})'(2/e)$ (donde f^{-1} es la función inversa).

(4) (a) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y + z = 1$.

(b) Calcule $\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, donde A es la región acotada por la curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$.